

Подсчет и комбинаторные тождества.

1. (a) Докажите *правило Паскаля*: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \leq k \leq n - 1$.
 (b) Докажите рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода:

$$S(n + 1, k + 1) = (k + 1) \cdot S(n, k + 1) + S(n, k).$$

$S(n, k)$ — количество разбиений n -элементного множества на k непустых подмножеств.

2. (a) Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, \dots, 11\}$ не найдется двух подряд идущих чисел?
 (b) Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, \dots, 11\}$ не найдется трех подряд идущих чисел?

3. Найдите суммы:

- (a) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$;
 (b) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$;
 (c) $C_n^k + C_{n+1}^{k+1} + \dots + C_{n+m}^{k+m}$;
 (d) $(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2$;
 (e) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n$.

4. Найдите «явные» формулы для сумм. В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

- (a) $\sum_{k \geq 0} C_n^{2k}$;
 (b) $\sum_{k \geq 0} C_n^{4k}$.