Задача-звёздочка (срок сдачи — 5 декабря)

Индуцированным (или *порождённым*) *паросочетанием* размера $2k$ в данном графе называется индуцированный $2k$-вершинный подграф, в котором степень каждой вершины равна 1. Докажите, что в $G(n, \frac{1}{2})$ асимптотически почти наверное нет индуцированного паросочетания размера не менее $2\log_2 n$.

Линейно-алгебраический метод

1. Докажите, что наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.
Указание: рассмотрите скалярные произведения соответствующих векторов.

2. Докажите, что среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
Указание: рассмотрите пространство

$$V_{25,9} = \Big\{(x_1, \ldots, x_{25}) \in \{0,1\} \mid \sum x_i = 9\Big\}$$

и докажите два вспомогательных утверждения:

(a) Для каждого $a \in V_{25,9}$ рассмотрим многочлен

$$F_a(x) = (\langle a, x\rangle - 1)(\langle a, x\rangle - 2) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{25}]/(x_1^2 - 1, \ldots, x_{25}^2 - 1),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_{25})$, то есть в котором для каждого i заменили $x_i^2 \mapsto 1$. Тогда для любого набора векторов $a_1, \ldots, a_s$, если их попарные скалярные произведения не делятся на 3, то многочлены $F_{a_1}, \ldots, F_{a_s}$ линейно независимы.

(b) Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, расстояние между которыми кратно трём.

3. Докажите, что среди любых k пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента, где

(a) $k = 107$
(b) $k = 92$

4. Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.
Указание: Для каждого двудольного подграфа выпишите его матрицу инцидентности и рассмотрите ранг суммы.