ДЗ. Найдите сумму $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n$.

* **(Звёздочка)** Используя тождество $(1+x)^p(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$, найдите сумму $\sum\limits_{s\geqslant 0}(-1)^s C_{k+s}^s C_p^{n-s}$.

Асимптотики.

Если не оговорено противное, то o, O, асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Запись $f(n) \ll g(n)$ означает, что $f(n) = o(g(n))$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Запись $f(n) \gtrsim g(n)$ означает, что $f(n) > (1+o(1))g(n)$.

Найти асимптотику для функции $f(n)$ означает найти «явную» функцию $a(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a(n)} = 1$.

1. Найдите асимптотику для функций:

(a) $g(n) = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{\pi n}{4}$;

(b) количества A_n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел.

2. (a) Докажите, что $\frac{2^n}{n+1} < C_n^{[n/2]} < 2^n$.

(b) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{C_n^{[n/2]}}$

3. (a) Докажите, что $n^n e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1} e^{-n+1}$.

(b) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{n!}$

Формула Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4. Найдите асимптотику для $C_n^{[n/2]}$

5. Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как

(a) $s^{s^3} = n$;

(b) $s(n) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \frac{2^m}{m} > n\}$.

Домашнее задание

6. Найдите асимптотику для

(a) $(2n-1)!!$

(b) $\ln(n!)$

(c) $C_{n^2}^n$

(d) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

7. Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как

(a) $s(n) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k! \leq n\}$;

(b) $s(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid C_m^{[m/2]} > n\}$;

(c) $s(n) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k^{k!} \leq n\}$.