

Асимптотики

1. (a) Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$ «равнозначны», т.е. верно ли, что для любой функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$ условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f(n)}{n} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)e^{-n} = 0$ равносильны?
- (b) Подберите функции $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$ такие, что $f(n) \sim g(n)$, но $e^{f(n)} \neq O(e^{g(n)})$.
- (c) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = o(g(n))$ и $g(n) = o(f(n))$?
- (d) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(f(n))$?
- (e) Следует ли из двух соотношений из (d), что $f(n) \sim g(n)$?

Перечисление деревьев

2. Каких графов с данными n вершинами больше:
 - (a) имеющих изолированную вершину или не имеющих?
 - (b) связных или несвязных?
3. Докажите, что
 - (a) код Прюфера определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством деревьев с данными n вершинами и множеством слов длины $n - 2$ из этих вершин.
 - (b) в коде Прюфера вершина степени d встречается $d - 1$ раз.
4. (a) Найдите код Прюфера дерева с вершинами $\{1, 2, \dots, 10\}$ и ребрами $(8, 9), (8, 4), (4, 10), (10, 3), (3, 5), (10, 6), (10, 1), (1, 7), (1, 2)$.
- (b) Восстановите дерево по коду Прюфера $1, 1, 2, 5, 4, 2, 7$.
5. (a) Каких графов больше, деревьев с данными 100 вершинами или унциклических графов с данными 98 вершинами?
- (b) Выразите число унциклических графов с данными n вершинами в виде суммы не более чем n слагаемых.