Плоские графы

1. a) Докажите *формулу Эйлера*: для любого связного плоского графа с n вершинами, e ребрами и f гранями имеет место равенство $n - e + f = 2$.

b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

2. *Применения формулы Эйлера*. Докажите следующие утверждения:

a) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, выполнены соотношения $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.

b) Графы K_5 и $K_{3,3}$ невозможно нарисовать на плоскости без самопересечений.

c) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

d) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ ребер, то $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$.

3. Докажите, что вершины планарного графа можно так раскрасить в шесть цветов, что никакие две одноцветные вершины не соединены ребром (то есть любой планарный граф — шестидольный). А в пять цветов?

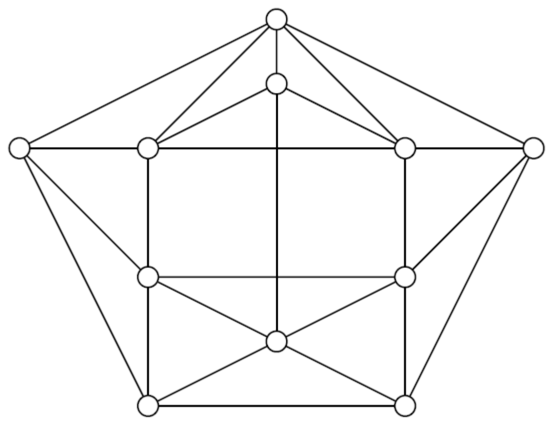
Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций добавления и удаления проходных вершин, то есть вершин степени 2.

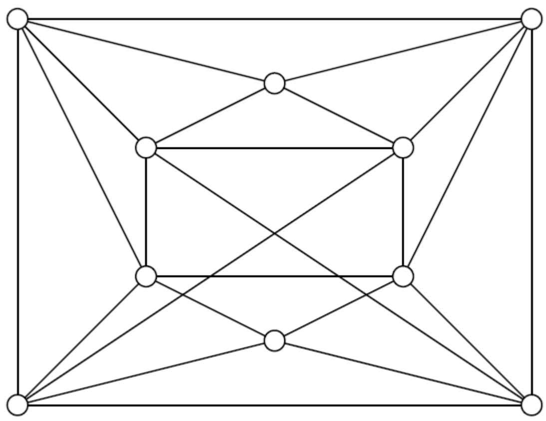
Граф H называется *минором* графа G, если существует подграф $G_1 \subset G$, который при помощи операции стягивания ребра можно свести к графу H.

Критерии планарности. Граф является планарным (или плоским) тогда и только тогда, когда

- *Понтрягина–Куратовского:* он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.
- *Вагнера:* графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.

4. Докажите непланарность следующих графов:





5. Нарисуйте графы K_5 и $K_{3,3}$ без самопересечений на торе.