Гамильтоновы пути и циклы.

Гамильтонов путь (цикл) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно один раз. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым*. Достаточные условия гамильтоновости графа на $n \geqslant 3$ вершинах:

Теорема Оре: сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n.

Теорема Дирака: степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$.

Теорема Эрдеша–Хватала: для некоторого $k \geqslant 2$ выполнены два условия:

- среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро,
- после удаления любого набора из $k-1$ вершины граф остается связным.

Несамопересекающийся путь (цикл) — путь (цикл), проходящий по каждой вершине не более одного раза. Длина пути (цикла) — число рёбер в нём.

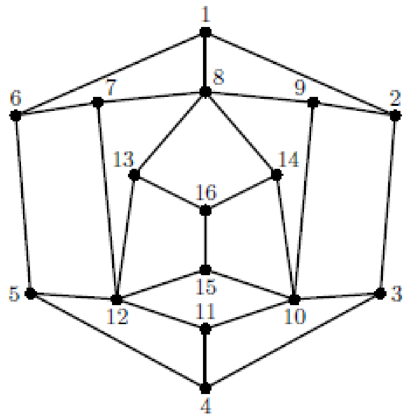
1. Докажите, что если в связном графе на n вершинах есть несамопересекающийся цикл длины $s < n$, то в этом графе также есть несамопересекающийся путь длины s.

2. Пусть $a_1, \ldots a_s$ — несамопересекающийся путь максимальной длины в графе, причём $s \geqslant 3$ и $\deg a_1 + \deg a_s \geqslant s$. Докажите, что в этом графе также есть несамопересекающийся цикл длины s.

3. Докажите, что грани гамильтонова плоского графа можно так раскрасить в 4 цвета, чтобы никакие две одноцветные грани не касались по ребру.

4. Есть ли в данном графе

(a) гамильтонов цикл;
(b) гамильтонов путь?



5. Докажите, что граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n-1$, имеет гамильтонов путь.

6. *Турнир* — это ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ровно одним ребром. Докажите следующие утверждения.

(a) В любом турнире имеется ориентированный гамильтонов путь.
(b) Для любого n существует турнир с n вершинами, в котором не менее $\frac{n!}{2^n}$ ориентированных гамильтоновых путей.