Раскраски графов.

Правильная раскраска графа в k цветов — это раскраска множества его вершин в k цветов так, чтобы никакие две одноцветные вершины не были смежными.

1. Пусть в связном графе степень каждой вершины не превосходит d. Докажите, что его можно правильно раскрасить в d цветов, если

(a) есть вершина степени менее d;

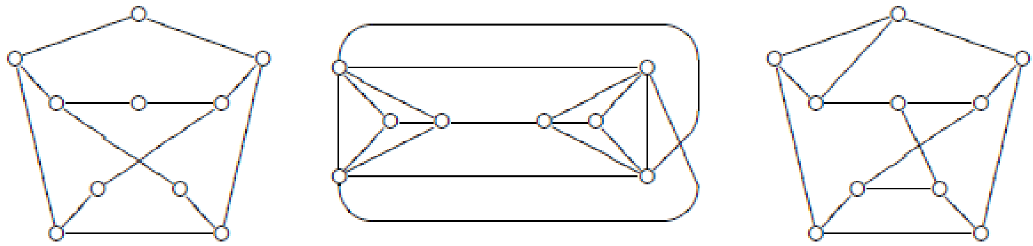
(b) есть вершина, при удалении которой граф перестаёт быть связным.

2. Пусть для данных графа G и числа k среди любых $k+1$ вершин есть ребро. Докажите, что G невозможно правильно покрасить менее, чем в n/k цветов.

3. Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d ребер, можно правильно раскрасить (как неориентированный) в $2d+1$ цвет.

- *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G.
- *Хроматическим индексом* $\chi'(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно раскрасить рёбра графа G (т.е. любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета).
- *Число независимости* $\alpha(G)$ — размер максимального независимого подмножества.
- *Кликовое число* $\omega(G)$ — размер максимального полного подграфа (клики).
- $\Delta(G)$ — максимум степеней вершин.
- Выполнены соотношения $\chi(G) \geqslant \omega(G)$ и $\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.
- **Теорема Брукса.** Если граф G связный, не полный и не является циклом нечётной длины, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
- **Теорема Визинга.** Для любого графа G выполнено $\chi'(G) = \Delta(G)$ или $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

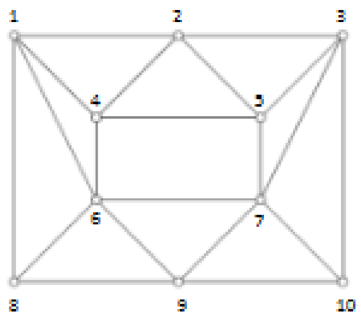
4. Найдите хроматическое число и хроматический индекс графов на рисунке.



1 2 3

- *Жадный* алгоритм раскраски вершин: выбирается нумерация вершин, а потом каждая вершина, начиная с первой, красится в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.

5. Запишите, как граф на рисунке будет раскрашен жадным алгоритмом. Использует ли при этом алгоритм наименьшее возможное для данного графа число цветов? Если да, то докажите, что в меньшее число цветов граф раскрасить нельзя.



6. Докажите, что качество раскраски, построенной жадным алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:

(a) Покажите, как упорядочить вершины произвольного графа, так, чтобы жадный алгоритм использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

(b) Для каждого натурального k предъявите двудольный граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная жадным алгоритмом, будет задействовать не менее k цветов.