Эйлеровы пути и циклы

Мультиграфом (или графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали. При этом число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца, интерпретируют как число рёбер (или кратность ребра) между вершинами с номерами i и j при $i \neq j$ или как число петель в вершине с номером i при $i = j$. Ребро называется кратным, если его кратность больше единицы.
Ориентированным мультиграфом (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел. Если в некоторой клетке (неважно, диагональной или нет) стоит число, большее 1, то говорят, что ориентированный мультиграф имеет кратные рёбра.
Эйлеров цикл (*путь*) в мультиграфе — это цикл (путь), проходящий по каждому ребру ровно один раз. Мультиграф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.
Критерий Эйлера. Мультиграф эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и все вершины в нём чётной степени.

1. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами:

(a) ориентированных, без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?
(b) неориентированных, имеющих k рёбер, без петель и кратных рёбер?
(c) неориентированных, имеющих k рёбер, если петли и кратные рёбра допускаются?

Последовательность де Брёйна (П. д. Б.) с параметрами n и k — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из k элементов (обычно — $\{0, 1, \dots, k-1\}$), причем все ее подпоследовательности длины n различны, и среди этих подпоследовательностей встречаются все k^n возможных последовательностей. Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.

Правило «0 лучше 1». Построим последовательность из 0 и 1 следующим образом, следя, чтобы все подпоследовательности длины n были различны. Начнём с n единиц. Далее каждый раз пишем 0, если можем. Если нет — пишем 1. Если не можем написать ни 0, ни 1 — заканчиваем написание последовательности.

2. Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ ('двоичную') и

(a) $n = 3$, начинающуюся с 111;
(b) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

Определим *мультиграф де Брёйна* для слов длины n из k-буквенного алфавита. (Стандартный термин — граф де Брйна.) Его вершины — слова длины $n-1$ из k-буквенного алфавита. Ориентированные ребра соответствуют словам $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$; ориентированное ребро $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, ведет от вершины $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ к вершине $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ (эти вершины могут совпадать).

3. Дан связный ориентированный мультиграф с n вершинами. Входящая степень d_k каждой вершины k равна исходящей.

(a) Докажите, что существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все ребра которого направлены в сторону вершины 1.
(b) Фиксируем дерево T из (a). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину v. Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему T, если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему T (такое ребро единственно). Докажите, что движение закончится в вершине 1, и что в результате получится ориентированный эйлеров цикл.
(c) Докажите, что число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!$.

4. Математик забыл трёхзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Докажите, что математик сможет открыть замок за

(a) 29 нажатий кнопок замка, если в коде могут содержаться только цифры 1, 3, 7;
(b) 1002 нажатия, если в коде могут содержаться все десять цифр.