Случайные графы.

Зафиксируем $p \in (0,1)$ и назовём *вероятностью графа* (в модели, или вероятностном пространстве, Эрдёша–Реньи) с n вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$ и e рёбрами число

$$\mathrm{P}(G) = p^e \cdot (1-p)^{C_n^2 - e}.$$

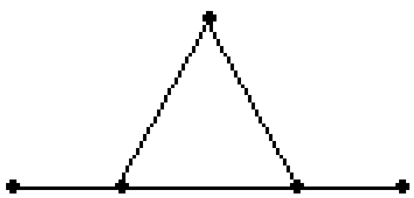
Вероятностью семейства (или, что то же самое, свойства) графов с данными вершинами называется сумма вероятностей входящих в него графов.
Случайной величиной называется функция, определённая на множестве всех графов с данными вершинами. Например, количество рёбер графа — случайная величина.
Математическим ожиданием случайной величины Y называется её «взвешенное среднее»

$$\mathbb{E}Y = \sum_G Y(G)\mathrm{P}(G) = \sum_{s=1}^{k} y_s \mathrm{P}\left(Y(G) = y_s\right),$$

где $y_1, \ldots, y_k$ — возможные значения Y.
Дисперсией случайной величины Y называется число $\mathbb{D}Y = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}Y)^2\right]$.

1. Для данных n и p найдите мат. ожидание количества

(a) изолированных вершин;
(b) треугольников;
(c) путей из трёх вершин;
(d) вершин степени 11;
(e) k-клик;
(f) k-клик, являющихся компонентами связности;
(g) подграфов, изоморфных графу на рисунке;
(h) индуцированных подграфов, изоморфных графу на рисунке.



2. Докажите, что для данных n и p вероятность наличия изолированного множества из k вершин меньше $e^{k\ln n-pk(k-}$

3. Для данных n и p найдите дисперсию величин, указанных в пп. 1.(a)–(d) первой задачи.

Асимптотики в случайных графах

Событие A_n происходит *асимптотически почти наверное* (а.п.н., также с асимптотической вероятностью 1) относительно последовательности $f(n)$, если $\mathrm{P}(A_n) \to 1$ при $p = f(n)$, $n \to \infty$. Общепринятое сокращение: при $p(n) = f(n)$ событие A_n происходит а.п.н.

Пусть даны случайная величина X и число $a > 0$.

Неравенство Маркова: $\mathrm{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{a}$.

Неравенство Чебышёва: $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{D}X}{a^2}$.

5. Докажите, что при $p = \frac{1}{2}$ а.п.н. нет клики размера $100 \ln n$.

6. Докажите, что хроматическое число случайного графа $G(n,p)$ а.п.н.

(a) не меньше $\frac{n}{20 \ln n}$ при $p = \frac{1}{3}$;

(b) не больше двух при $p(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$;

(c) равно единице при $p(n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

7. Докажите, что при $p(n) = \frac{1}{2n}$ а.п.н. в графе более $\frac{n}{2}$ изолированных вершин.

8. Докажите, что при $p(n) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ а.п.н. никакая пара рёбер не имеет общей вершины.

Функция $p^*(n)$ называется *пороговой вероятностью* для свойства A, если

- при $\frac{p(n)}{p^*(n)} \to 0$ а.п.н. граф не обладает свойством A,
- а при $\frac{p(n)}{p^*(n)} \to +\infty$ а.п.н. граф обладает свойством A.

9. Докажите, что пороговой вероятностью для свойства «граф содержит треугольник» является функция $p^*(n) = \frac{1}{n}$.