Перманент

ДА 21.4.2018

Перманент квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ определяется формулой

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}, \quad \text{где } S_n \text{ — группа всех перестановок } \{1\ldots,n\}.$$

1. Найдите перманент матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Подматрицей данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. Перманент прямоугольной матрицы $A^{m\times n}$ определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера.

- Перманент не меняется при перестановке строк, а также при транспонировании.
- *Формула разложения по строке.* Если $m \leqslant n$, то для любого $i \in \{1,\ldots,m\}$

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

2. Найдите перманент матрицы размера $m \times n$, состоящей из одних единиц.

3. Докажите, что при $m \leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы размера $m \times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. для системы из m подмножеств множества $\{1,\ldots n\}$, определяемых строками.

4. Докажите *формулу Райзера* для перманента: $\mathrm{Per}(A) = (-1)^n \sum\limits_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} \prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j\in S} a_{ij}$.

Размерность Вапника–Червоненкиса

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathrm{Subsets}(X)$ — семейство подмножеств произвольного множества X. Множество $A \subset X$ называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$, если пересечения A с множествами из $\mathcal{R}$ образуют все подмножества A. *Размерностью Вапника–Червоненкиса* $\mathrm{VC}(X,\mathcal{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X,\mathcal{R})$ называется размер максимального (по мощности) подмножества $A \subset X$, дробящегося $\mathcal{R}$. Если максимального подмножества нет, то полагают $\mathrm{VC}(X,\mathcal{R}) := \infty$.

5. Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.

6. Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:

(a) $\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,3,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{2,4,5,6\}$;

(b) $\{\{1,\ldots,k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

(c) $\{\{k,2k,3k,\ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

(d) Можно ли добавить ещё одно множество к системе (a) так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

Домашнее задание.

1. Найдите перманент матрицы

(k) размера 4×4, у которой $k = 0,1,2,3,4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в т. ч. не диагональные) элементы — единицы;

(n) размера $n \times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

2. Найдите VC-размерность следующих семейств:

(a) $\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,4,5\},\{2,3,5\},\{2,6,7\},\{3,4,6,7\}$;
(b) $\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{1,6,9\}$;
(c) $\{\{k,k+1,k+2,\ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\{k,k^2,k^3,\ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(e) Можно ли добавить еще одно множество к системам из пунктов (a) и (b) так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?