Многоцветные числа Рамсея

1. Докажите следующие утверждения.

(a) $R(n,n) > (n-1)^2$.
(b) Если $C_r^n < 2^{C_n^2-1}$, то $R(n,n) > r$.
(c) Если $C_r^n < s \cdot 2^{C_n^2-1}$, то $R(n,n) > r-s$.
(d) $R(n,n) > r - C_r^n \cdot 2^{1-C_n^2} - 1$ для любого r.
(e) *Теорема Эрдеша.* $R(n,n) \gtrapprox \frac{n}{e} \cdot 2^{\frac{n}{2}}$.

2. (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Докажите, что тогда есть одноцветный треугольник.
(b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.

Числом Рамсея $R(m_1, \dots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски ребер графа K_x в k цветов для некоторого i найдется m_i-клика i-ого цвета.

Например, очевидно, что $R(1,m,n) = 1$ и $R(2,m,n) = R(m,n)$ для любых m, n. В задаче 2 доказано, что $10 \le R(3,3,3) \le 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m_1, \dots, m_k$.

3. Докажите следующие утверждения.

(a) $R(m,n,p) \le R(R(m,n),p)$.
(b) $R(m_1, m_2, \dots, m_k) \le R(m_1 - 1, m_2, \dots, m_k) + R(m_1, m_2 - 1, \dots, m_k) + \dots$
$\dots + R(m_1, m_2, \dots, m_k - 1)$.

Домашнее задание

1. Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \dots, m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.

2. Докажите, что если ребра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит $14, 15$ или 16 синих ребер.

3. Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n, \dots, n}_{k})$, аналогичные утверждениям задачи **1(a,e)**.