

Числа Рамсея для подграфов

1. Докажите, что для любых графов G и H найдётся натуральное $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, для которого при любой раскраске рёбер графа K_r в два цвета найдется либо подграф первого цвета, изоморфный G , либо подграф второго цвета, изоморфный H .

Наименьшее из таких чисел r обозначается $R(G, H)$.

2. Докажите, что $R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(c(H) - 1) + 1$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G , $c(H)$ — число вершин в наибольшей компоненте связности.

3. Обозначим через T_m дерево на m вершинах. Докажите следующие утверждения.

(a) $R(T_m, K_n) = (m - 1)(n - 1) + 1$.

(b) Если $m - 1$ делит $n - 1$, то $R(T_m, K_{1,n}) = m + n - 1$.

Домашнее задание

1. Обозначим через nK_3 граф из n непересекающихся (по вершинам) треугольников. Докажите следующие утверждения.

(a) $R(nK_3, nK_3) \geq 5n$.

(b) Ребра графа раскрашены в два цвета. Если есть два непересекающихся одноцветных треугольника разных цветов, то среди их вершин есть пять, на которых есть два одноцветных треугольника разных цветов, пересекающихся по одной вершине.

(c) $R(nK_3, nK_3) \leq 5n + 1$.