Системы общих представителей

Системой общих представителей (сокращенно с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется такое множество A, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$. *Минимальная с.о.п.* — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$.

Будем называть (n, s, k)-*набором* набор k-элементных подмножеств множества $[n] = \{1, \dots, n\}$, в котором s множеств(данный термин не общепринят); это элемент $C^s_{C^k_{[n]}}$.

1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 видов проблем. Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков: для каждой проблемы в команде должен быть специалист по ней, а размер команды должен быть минимален. Докажите, что

(a) при любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.
(b) при некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

2. Для набора множеств $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 6\}\}$ найдите

(a) некоторую с.о.п.;
(b) минимальную с.о.п.

3. (a) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k-элементных подмножеств в $[n]$.
(b) Сколько для него имеется минимальных с.о.п.?

4. Постройте $(2n, 2C^{k-1}_{n-1}, k)$-набор, для которого минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.

5. *Жадным алгоритмом* называется следующий. Возьмем любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в 'пред-с.о.п' и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмем элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т. д. Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если

(a) $k = 1$;
(b) $k = 2$.

6. Обозначим $G(n, s, k) := \max\left(\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right) + \frac{n}{k} + 1$. Докажите следующие утверждения.

(a) Для любого (n, s, k)-набора найдется с.о.п. размера меньше $G(n, s, k)$.
(b) Если $k \leqslant n - l$ и $G(C^k_n, C^l_n, C^k_{n-l}) \leqslant s$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.
(c) Если $l \leqslant n - k$ и $C^l_n \cdot C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}} < C^s_{C^k_n}$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

Домашнее задание

1. Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если k произвольно.

2. Докажите следующие утверждения.

(a) Если $n \geqslant 32k$ и $60 \leqslant \frac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $\frac{n}{64k}\ln\frac{sk}{n}$.
(b) Для всех достаточно больших n если $k^2 l + kl^2 < n^{1.8}$, то $k < n - l$ и $\frac{C^k_n}{C^k_{n-l}} < 2e^{\frac{kl}{n}}$.
(c) Для всех достаточно больших n и k если $101\ln\ln k < \ln\frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $0,99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$.