

## Перманент

Перманент квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$  определяется формулой

$$\text{Per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}, \quad \text{где } S_n \text{ — группа всех перестановок } \{1, \dots, n\}.$$

1. Найдите перманент матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

*Подматрицей* данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. Перманент прямоугольной матрицы  $A^{m \times n}$  определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера.

- Перманент не меняется при перестановке строк, а также при транспонировании.
- *Формула разложения по строке.* Если  $m \leq n$ , то для любого  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\text{Per}(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{Per}(A_{ij}),$$

где  $A_{ij}$  — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца.

2. Найдите перманент матрицы размера  $m \times n$ , состоящей из одних единиц.
3. Докажите, что при  $m \leq n$  перманент прямоугольной матрицы размера  $m \times n$  из нулей и единиц равен количеству с.р.п. для системы из  $m$  подмножеств множества  $\{1, \dots, n\}$ , определяемых строками.
4. Докажите *формулу Райзера*:  $\text{Per}(A) = (-1)^n \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|} \prod_{i=1}^n \sum_{j \in S} a_{ij}$ .

## Размерность Вапника–Червоненкиса

Пусть  $\mathcal{R} \subset \text{Subsets}(X)$  — семейство подмножеств произвольного множества  $X$ . Множество  $A \subset X$  называется *дробящимся* системой  $\mathcal{R}$ , если пересечения  $A$  с множествами из  $\mathcal{R}$  образуют все подмножества  $A$ . *Размерностью Вапника–Червоненкиса*  $\text{VC}(X, \mathcal{R})$  (или  $\text{VC}$ -размерностью) пары  $(X, \mathcal{R})$  называется размер максимального (по мощности) подмножества  $A \subset X$ , дробящегося  $\mathcal{R}$ . Если максимального подмножества нет, то полагают  $\text{VC}(X, \mathcal{R}) = \infty$ .

5. Найдите  $\text{VC}$ -размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.
6. Найдите  $\text{VC}$ -размерность следующих семейств множеств:
  - (a)  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}$ ;
  - (b)  $\{\{1, \dots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;
  - (c)  $\{\{k, 2k, 3k, \dots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;
  - (d) Можно ли добавить ещё одно множество к системе (a) так, чтобы  $\text{VC}$ -размерность увеличилась на 1?

## Домашнее задание

1. Найдите перманент матрицы
  - (k) размера  $4 \times 4$ , у которой  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  диагональных элементов — нули, а все остальные (в т. ч. не диагональные) элементы — единицы;
  - (n) размера  $n \times n$ , у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.
2. Найдите  $\text{VC}$ -размерность следующих семейств:
  - (a)  $\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6, 7\}$ ;
  - (b)  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 6, 9\}$ ;
  - (c)  $\{\{k, k+1, k+2, \dots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;
  - (d)  $\{\{k, k^2, k^3, \dots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;
  - (e) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из пунктов (a) и (b) так, чтобы  $\text{VC}$ -размерность увеличилась на 1?