Матрицы Адамара

Теорема Адамара. Если у матрицы A размера $n \times n$ все элементы по модулю не больше 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.
Квадратная матрица H называется *матрицей Адамара*, если все ее элементы равны ± 1 и столбцы попарно ортогональны.
Гипотеза. Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа n, кратного 4.
Гипотеза не доказана, в частности, для $n = 668, 716, 892$.
Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у нее первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

1. Докажите теорему Адамара.

2. Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков $1, 2, 4$.

3. Докажите, что если H — матрица Адамара, то $H \cdot H^T = n \cdot E_n$.

Адамаровость матрицы сохраняется при умножении строки или столбца на -1, а также при перестановке строк или столбцов. Матрицы Адамара, получаемые друг из друга применением некоторого числа таких преобразований, называются *эквивалентными*.

Количество классов эквивалентности: для порядков $1, 2, 4, 8, 12$ — **1**; 16 — **5**; 20 — **3**; 24 — **60**; 28 — **487**; 32 — **больше миллиона**.

4. Докажите, что для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Именно этому факту матрицы Адамара обязаны своим названием)

5. Для простого числа p обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}_p} \left(\frac{j(j+d)}{p}\right)$ — сумма символов Лежандра.

(a) Докажите, что S_d не зависит от $d \neq 0$.
(b) Найдите S_d для каждого $d \in \mathbb{Z}_p$.

6. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для n, равного

(2a) $2a$, если дана матрица Адамара $a \times a$;
(ab) ab, если даны матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;
(4k) $p + 1$, где p — простое число вида $4k - 1$.

Домашнее задание.

1. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n = 2p + 2$, где p — простое число вида $4k + 1$.