

Многоцветные числа Рамсея

1. Докажите следующие утверждения.

- (a) $R(n, n) > (n - 1)^2$.
- (b) Если $C_r^n < 2^{C_n^2 - 1}$, то $R(n, n) > r$.
- (c) Если $C_r^n < s \cdot 2^{C_n^2 - 1}$, то $R(n, n) > r - s$.
- (d) $R(n, n) > r - C_r^n \cdot 2^{1 - C_n^2} - 1$ для любого r .
- (e) Теорема Эрдеша. $R(n, n) \gtrsim \frac{n}{e} \cdot 2^{\frac{n}{2}}$.

2. (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Докажите, что тогда есть одноцветный треугольник.
- (b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.

Число Рамсея $R(m_1, \dots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x , что для любой раскраски ребер графа K_x в k цветов для некоторого i найдется m_i -клика i -ого цвета.

Например, очевидно, что $R(1, m, n) = 1$ и $R(2, m, n) = R(m, n)$ для любых m, n . В задаче 2 доказано, что $10 \leq R(3, 3, 3) \leq 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых m_1, \dots, m_k .

3. Докажите следующие утверждения.

- (a) $R(m, n, p) \leq R(R(m, n), p)$.
- (b) $R(m_1, m_2, \dots, m_k) \leq R(m_1 - 1, m_2, \dots, m_k) + R(m_1, m_2 - 1, \dots, m_k) + \dots$
 $\dots + R(m_1, m_2, \dots, m_k - 1)$.

Домашнее задание

1. Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \dots, m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.
2. Докажите, что если ребра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих ребер.
3. Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n, \dots, n}_k)$, аналогичные утверждениям задачи 1(a,e).