Теорема Шура

Докажите следующие теоремы.

1. *Теорема Шура.* Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

Более точно, для любого целого $n > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в n цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

2. Для любого целого $n > 0$ существует такое $r > 0$, что для любого простого числа $p > r$ сравнение $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ имеет ненулевое решение.

Числа Рамсея для гиперграфов

3. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что есть 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4. Докажите следующие утверждения.

(a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) *Теорема Эрдёша–Секереша.* Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 10-угольник.

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1, \ldots, m_k \geq l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет.

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \ldots, m_k) = R(m_1, \ldots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче **3.** требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leq 8000$, А задача **4.**c вытекает из существования $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$.

5. Докажите, что число $R_l(m_1, \ldots, m_k)$ существует для любых $m_1, \ldots, m_k$, обосновав следующие утверждения:

(a)
(b) $R_l(m_1, \ldots, m_k) \leq R_l(R_l(m_1, m_2), m_3, \ldots, m_k)$.
(c) Докажите, что $R_l(m, n) \leq R_{l-1}(R_l(m-1, n), R_l(m, n-1)) + 1$.

Домашнее задание

1. Докажите, что сравнение $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ имеет ненулевое решение для

(a) $n = 2, p = 89$;
(b) $n = 4, p = 83$ (сведите к $n = 2$);
(c) $n = 3, p = 97$;
(d) $n = 9, p = 97$ (сведите к меньшему n).

2. Докажите, что если $C_r^n < 2^{C_n^3 - 1}$, то $R_3(n, n) > r$.

3. Докажите, что найдется такое число $c > 0$, что $R_3(n, n) \geq 2^{cn^2}$.

4. *Звёздочка.* Докажите, что среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 5-угольник.

Теорема Шура

Докажите следующие теоремы.

1. *Теорема Шура.* Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

Более точно, для любого целого $n > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в n цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

2. Для любого целого $n > 0$ существует такое $r > 0$, что для любого простого числа $p > r$ сравнение $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ имеет ненулевое решение.

Числа Рамсея для гиперграфов

3. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что есть 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4. Докажите следующие утверждения.

(a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) *Теорема Эрдёша–Секереша.* Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 10-угольник.

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \dots, m_k)$, где $m_1, \dots, m_k \geq l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет.

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \dots, m_k) = R(m_1, \dots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче **3.** требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leq 8000$, А задача **4.**c вытекает из существования $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$.

5. Докажите, что число $R_l(m_1, \dots, m_k)$ существует для любых $m_1, \dots, m_k$, обосновав следующие утверждения:

(a)
(b) $R_l(m_1, \dots, m_k) \leq R_l(R_l(m_1, m_2), m_3, \dots, m_k)$.
(c) Докажите, что $R_l(m, n) \leq R_{l-1}(R_l(m-1, n), R_l(m, n-1)) + 1$.

Домашнее задание

1. Докажите, что сравнение $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ имеет ненулевое решение для

(a) $n = 2, p = 89$;
(b) $n = 4, p = 83$ (сведите к $n = 2$);
(c) $n = 3, p = 97$;
(d) $n = 9, p = 97$ (сведите к меньшему n).

2. Докажите, что если $C_r^n < 2^{C_n^3 - 1}$, то $R_3(n, n) > r$.

3. Докажите, что найдется такое число $c > 0$, что $R_3(n, n) \geq 2^{cn^2}$.

4. *Звёздочка.* Докажите, что среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 5-угольник.