Независимость и доказательства существования

Определение. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если $|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|$. При $B \neq \emptyset$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M. События A и B называются *независимыми*, если $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. В частности, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

1. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

2. Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $\{1, \ldots, 400\}$ в 2 цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.
(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно.
(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

3. Докажите, что подмножества A и B конечного множества M независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B} = M \setminus B$ независимы.

4. (a) Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$?
(b) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется независимостью в совокупности.)
(c) Тот же вопрос, если богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

Определение. Подмножество A конечного множества M называется *независимым* от набора подмножеств $B_1, \ldots, B_k \subset M$, если A независимо с пересечением любого набора множеств из $B_1, \ldots, B_k$. Событие A называется *независимым* от набора событий $B_1, \ldots, B_k$, если A независимо с пересечением любого набора событий из $B_1, \ldots, B_k$.

5. Приведите пример попарно независимых подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, но для которых A не является независимым от набора B_1, B_2.

Домашнее задание

1. По кругу стоят 200 студентов из 10 групп по 20 студентов. Докажите, что можно выбрать старост в группах так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

2. Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо от набора B_1, B_2.

3. Докажите равносильность условий на подмножества $A, B_1, \ldots, B_k$ конечного множества:

(a) A независимо от набора $B_1, \ldots, B_k$;
(b) $\overline{A}$ независимо от набора $B_1, \ldots, B_k$;
(c) A независимо от набора $\overline{B_1}, \ldots, \overline{B_k}$.

Независимость и доказательства существования

Определение. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если $|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|$. При $B \neq \emptyset$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M. События A и B называются *независимыми*, если $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. В частности, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

1. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

2. Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $\{1, \dots, 400\}$ в 2 цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \dots, 18\}$ одноцветно.
(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \dots, 18\}$ неодноцветно.
(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \dots, 13\}$ одноцветно.

3. Докажите, что подмножества A и B конечного множества M независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B} = M \setminus B$ независимы.

4. (a) Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$?
(b) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется независимостью в совокупности.)
(c) Тот же вопрос, если богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

Определение. Подмножество A конечного множества M называется *независимым* от набора подмножеств $B_1, \dots, B_k \subset M$, если A независимо с пересечением любого набора множеств из $B_1, \dots, B_k$. Событие A называется *независимым* от набора событий $B_1, \dots, B_k$, если A независимо с пересечением любого набора событий из $B_1, \dots, B_k$.

5. Приведите пример попарно независимых подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, но для которых A не является независимым от набора B_1, B_2.

Домашнее задание

1. По кругу стоят 200 студентов из 10 групп по 20 студентов. Докажите, что можно выбрать старост в группах так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

2. Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо от набора B_1, B_2.

3. Докажите равносильность условий на подмножества $A, B_1, \dots, B_k$ конечного множества:

(a) A независимо от набора $B_1, \dots, B_k$;
(b) $\overline{A}$ независимо от набора $B_1, \dots, B_k$;
(c) A независимо от набора $\overline{B_1}, \dots, \overline{B_k}$.