Локальная лемма Ловаса

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — конечный набор событий (подмножеств конечного множества), причём каждое $A \in \mathcal{A}$ независимо с набором $J(A) \subset \mathcal{A}$.

Симметричная форма. Пусть для некоторого $d > 2$ выполнены условия

- $|J(A)| \geq n - d$ для каждого $A \in \mathcal{A}$;
- $P(A) \leq p$ для каждого $A \in \mathcal{A}$;
- $ep(d+1) \leq 1$.

Тогда пересечение дополнений $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$ имеет ненулевую вероятность (долю).

Несимметричная форма. Пусть нашлось такое сопоставление событиям чисел $\gamma\colon \mathcal{A} \to (0,1)$, что
$$P(A) \leq \gamma(A) \prod_{B \notin J(A)} (1 - \gamma(B)) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$
Тогда
$$P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \geq \prod_{A\in\mathcal{A}} (1 - \gamma(A)).$$

1. По кругу стоят 1600 студентов из 100 групп по 16 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

2. Дан такой набор $\mathcal{S}$ k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что каждый элемент $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ содержится ровно в k подмножествах из $\mathcal{S}$. Докажите, что при $k \geq 10$ можно так раскрасить $\{1, 2, \ldots, n\}$ в два цвета, что все подмножества $\mathcal{S}$ будут неодноцветны.

3. Классическая **теорема Ван дер Вардена** утверждает, что для любой пары чисел k, r существует такое число W, что при любой раскраске $\{1, 2, 3, \ldots, W\}$ в r цветов среди них найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k. Минимальное такое число W называется числом Ван дер Вардена и обозначается $W(k, r)$. Докажите, что $W(k, 2) \geq \frac{1}{6} \cdot \frac{2^k}{k}$.

4. Докажите *теорему Спенсера*: $R(s, s) \geqslant (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}$.

5. Пусть есть три вида событий: $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ и $C_1, \ldots, C_m$. Пусть на каждое событие вида A могут влиять не больше n_{AB} событий вида B и не более n_{AC} событий вида C. Аналогично введем величины $n_{BA}, n_{BC}, n_{CA}, n_{CB}$. Убедитесь, что для выполнения неравенства
$$\Pr\left[\bigcap_i \left(\overline{A_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{C_i}\right)\right] > 0$$
достаточно существования таких чисел $a, b, c \in (0, 1)$, что
$\Pr[A_i] \leq a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$,
$\Pr[B_i] \leq b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$,
$\Pr[C_i] \leq c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$.

Домашнее задание

1. По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов (теперь видов работ не обязательно 100). Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

2.
- (a) Докажите, что для любого $M \in \mathbb{R}$ можно так раскрасить все вещественные числа в 2 цвета, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x + M$ были разных цветов.
- (b) Докажите, что для любых 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно так раскрасить все вещественные числа в 3 цвета, что для любого $x \in X$ среди чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ были числа каждого из трёх цветов.