

Системы общих представителей

Системой общих представителей (сокращенно с.о.п.) для набора \mathcal{M} множеств называется такое множество A , что $M \cap A \neq \emptyset$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Минимальная с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора \mathcal{M} .

Будем называть (n, s, k) -набором набор k -элементных подмножеств множества $[n] = \{1, \dots, n\}$, в котором s множеств (данный термин не общепринят); это элемент $C_{C[n]}^{s, k}$.

1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 видов проблем. Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков: для каждой проблемы в команде должен быть специалист по ней, а размер команды должен быть минимален. Докажите, что
 - (a) при любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.
 - (b) при некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.
2. Для набора множеств $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 6\}\}$ найдите
 - (a) некоторую с.о.п.;
 - (b) минимальную с.о.п.
3.
 - (a) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k -элементных подмножеств в $[n]$.
 - (b) Сколько для него имеется минимальных с.о.п.?
4. Постройте $(2n, 2C_{n-1}^{k-1}, k)$ -набор, для которого минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.
5. Жадным алгоритмом называется следующий. Возьмем любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в 'пред-с.о.п' и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмем элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т. д. Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если
 - (a) $k = 1$;
 - (b) $k = 2$.
6. Обозначим $G(n, s, k) := \max \left(\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \right) + \frac{n}{k} + 1$. Докажите следующие утверждения.
 - (a) Для любого (n, s, k) -набора найдется с.о.п. размера меньше $G(n, s, k)$.
 - (b) Если $k \leq n-l$ и $G(C_n^k, C_n^l, C_{n-l}^k) \leq s$, то найдется (n, s, k) -набор, размер любой с.о.п. которого больше l .
 - (c) Если $l \leq n-k$ и $C_n^l \cdot C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s < C_n^s$, то найдется (n, s, k) -набор, размер любой с.о.п. которого больше l .

Домашнее задание

1. Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если k произвольно.
2. Докажите следующие утверждения.
 - (a) Если $n \geq 32k$ и $60 \leq \frac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n, s, k) -набор, размер любой с.о.п. которого больше $\frac{n}{64k} \ln \frac{sk}{n}$.
 - (b) Для всех достаточно больших n если $k^2 l + kl^2 < n^{1.8}$, то $k < n-l$ и $\frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} < 2e^{\frac{kl}{n}}$.
 - (c) Для всех достаточно больших n и k если $101 \ln \ln k < \ln \frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n, s, k) -набор, размер любой с.о.п. которого больше $0,99 \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$.