Системы различных представителей

1. Докажите **лемму о паросочетаниях:** есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках так, чтобы брачные пары не пересекались, тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.

- **Теорема Холла.** Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все x_i были различны, тогда и только тогда, когда для любого $k \leq m$ объединение любых k из этих множеств имеет не менее k элементов.

2. Какое минимальное количество ребер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось паросочетаний (т. е. подграфа из n непересекающихся отрезков)?

- Пусть дан набор множеств $\mathcal{M}$, в каждом из которых выбрали по элементу. Если все элементы различны, то такой набор назовём системой различных представителей (с.р.п.). Формально, с.р.п. для набора $\mathcal{M}$ называется такое инъективное отображение $x\colon \mathcal{M} \to \bigcup_{\mathcal{M}} S$, что $x(S) \in S$ для любого $S \in \mathcal{M}$. Это даёт упорядоченный набор, что полезно для подсчёта количества с.р.п.

  Например, теорема Холла утверждает, что у системы $S_1, \ldots, S_m$ конечных множеств есть с.р.п. тогда и только тогда, когда $|\bigcup\limits_{i \in I} S_i| \geqslant |I|$ для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$.

3. Пусть для системы m-элементных множеств каждый элемент любого из множеств входит ровно в l из них. Докажите, что при $m \geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

4. Из набора множеств $\mathcal{M}$ выбран поднабор $\mathcal{M}' = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — с.р.п. $\mathcal{M}'$. Докажите, что если у всего $\mathcal{M}$ есть с.р.п., то найдётся его с.р.п., содержащая $x_1, \ldots, x_k$.

5. Обозначим через $F(S_1, \ldots, S_m)$ количество с.р.п. у набора $\{S_1, \ldots, S_m\}$. Для любого ли k существует система $S_1, \ldots, S_m$ такая, что $F(S_1, \ldots, S_m) = k$?

Домашнее задание

1. Докажите теорему Холла.

2. Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2)$ при условии $|S_1| = |S_2| = 5$.

3. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств:

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i,\ m \leqslant |S|.$$

Пусть выполнено следующее условие: для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ содержит не более k из множеств $B_1, \ldots, B_m$. Докажите, что тогда можно так перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$, чтобы после перенумерации $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, m$.