Топология

ГКП-3, упр.1. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

ГКП-3, упр.2. Гомеоморфны ли окружность и граница треугольника?

ГКП-3, упр.3*. Рассмотрим буквы T, X, L и E как топологические пространства. Какие из них гомеоморфны друг другу?

ГКП-3, упр.4*. Докажите, что если X компактно, то любое взаимно-однозначное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, где Y — хаусдорфово.

Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f\colon U \to M$. *Оператор формы* $S\colon \mathrm{T}_pU \to \mathrm{T}_pU$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = d\mathrm{N}(X)$. *Главные* кривизны k_1, k_2 и направления — это собственные значения и векторы S. *Гауссова* кривизна $\mathrm{K} = k_1k_2$, *средняя* кривизна $\mathrm{H} = k_1 + k_2$.

ГКП-3, упр.5. Возьмите в качестве M либо сферу

$$f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$

либо тор

$$f(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

Вычислите главные кривизны и направления M в точке $r(0,0)$.

ГКП-3, упр.6. Докажите, что $\mathrm{H}^2 \geq 4\mathrm{K}$. Когда достигается равенство?

ГКП-3, упр.7*. Вторая квадратичная форма определяется через

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -g(SX,Y) = -d\mathrm{N}(X)\cdot df(Y).$$

Выразите её в координатах. Докажите, что $k_n(X) = \frac{\mathrm{I\!I}(X,X)}{g(X,X)}$.