Отображения

1. В какой трёхмерный многогранник перейдёт четырёхмерный единичный куб при факторизации $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ по одномерному подпространству, порождённому суммой стандартных базисных векторов?

2. Чему равна композиция отражений векторного пространства относительно координатных гиперплоскостей?

3. Зафиксируем на аффинной плоскости две точки $P \neq Q$. Является ли аффинным отображение, переводящее каждую точку плоскости X в центр треугольника PQX?

4. Чему равна композиция двух гомотетий аффинной плоскости (с разными центрами и коэффициентами)?

Группы

5. Проверьте, что $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ коммутативна, но $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ — нет.

6. Покажите, что группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ порождается поворотами на $180°$, и все такие повороты сопряжены друг другу. Докажите, что $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ проста.

7. Найдите линейную оболочку $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ в пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

8. (Движения в $\mathbb{R}^3$) Пусть T_v, S_H, $R_{v,\varphi}$ обозначают соответственно параллельный перенос на вектор v, отражение относительно гиперплоскости H и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против часовой стрелки. Выясните, когда имеют места написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой

a) $S_{H_1} \circ S_{H_2} = R_{v,\varphi}$,
b) $S_{H_1} \circ S_{H_2} = T_v$,
c) $S_H \circ R_{v,\varphi} \circ S_H = R_{u,\psi}$,
d) $R_{v_1,\varphi_1} \circ R_{v_2,\varphi_2} = T_v \circ R_{u,\psi}$,
e) $R_{u,\varphi} \circ S_{H_1} \circ R_{u,-\varphi} = S_{H_2}$.

9. Пусть $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – некоторое движение. Найти движения

a) $F \circ T_v \circ F^{-1}$,
b) $F \circ S_H \circ F^{-1}$,
c) $F \circ R_{v,\varphi} \circ F^{-1}$.

Проективная геометрия

10. Рассмотрим на проективной плоскости . Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ так, чтобы точки $A' = (1:0:0)$, $B' = (0:1:0)$, $C' = (0:0:1)$ лежали соответственно на прямых $(CB), (AC), (AB)$, а прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ пересекались в точке $(1:1:1)$.

11. Опишите все такие преобразования из PGL_2, что

a) $\infty \to \infty$,
b) $\infty \to \infty,\ 0 \to 0$,
c) $\infty \to 0,\ 0 \to \infty,\ 1 \to 1$,
d) $\infty \to 1,\ 0 \to 0,\ 1 \to \infty$,

e) $\infty \to \infty,\ 0 \to 1,\ 1 \to 0.$

12. (Теорема Паппа) Пусть точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Докажите, что точки пресечений прямых $(a_1b_2) \cap (a_2b_1)$, $(a_1c_2) \cap (a_2c_1)$, $(c_1b_2) \cap (c_2b_1)$ тоже коллинеарны.

13. Сформулируйте *двойственное* утверждение к теореме Паппа.

14. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $U, V \subset \mathbb{P}^n$ выполняется неравенство $\dim(U \cap V) \geqslant \dim U + \dim V - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}^n$ пересекаются).