Алгебраические группы

Пусть $X = \mathrm{V}(I) \subset \mathbb{A}^n$, $Y = \mathrm{V}(J) \subset \mathbb{A}^m$ — алгебраические множества. *Морфизм* аффинных алгебраических многообразий $\phi\colon X \to Y$ — это отображение, являющееся ограничением полиномиального отображения пространств $(P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_m(x_1, \ldots, x_n))\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.

1. Пусть ϕ как выше. Двойственный гомоморфизм ϕ^* переводит алгебру функций $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]/J$ в $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$. Напишите его формулу.

2. Пусть $C = \mathrm{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$. Проверьте, что отображение $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to C, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$ — морфизм. Является ли ϕ изоморфизмом?

3. *Аффинное алгебраическое многообразие* X — это (неприводимое) алгебраическое множество с точностью до изоморфизма. Вложение в аффинное пространство соответствует выбору набора порождающих алгебры функций $\mathbb{K}[X]$. Проверьте это.

4. Пусть $Y = \mathrm{V}(I) \subset X$ — замкнутое подмножество. Открытое подмножество $U = X \setminus Y$ имеет алгебру функций $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[X]_I = \left\{ \frac{x}{z} \mid x, z \in \mathbb{K}[X], \exists n, I^n \frac{x}{z} \subset \mathbb{K}[X] \right\}$. Пусть $U \subset \mathbb{A}^1$ — непустое открытое множество. Найдите минимальную систему порождающих $\mathbb{K}[U]$.

5. Проверьте, что невырожденные матрицы $n \times n$ над $\mathbb{K}$ образуют группу по умножению. Это *полная линейная группа* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Найдите её алгебру функций и убедитесь, что отображения умножения и обратного элемента — морфизмы. Такая группа называется *(аффинной) алгебраической.*

Группа поля по сложению $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ называется *аддитивной* (однопараметрической) группой, а группа поля по умножению $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}^\times, \cdot)$ — *мультипликативной.*

6. * Докажите, что на $\mathbb{A}^1$ без двух и более точек нет структуры алгебраической группы.

7. Найдите замкнутые подгруппы в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, изоморфные $\mathbb{G}_a$ или $\mathbb{G}_m$.
Указание: Чему равно замыкание бесконечной циклической подгруппы в $\mathbb{G}_a$ или $\mathbb{G}_m$?

8. Пусть $U, V \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ — непустые открытые подмножества, а поле $\mathbb{K}$ бесконечно. Докажите, что $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Действием алгебраической группы G на многообразии X называется морфизм $\cdot\colon G \times X \to X$, задающий действие G как (абстрактной) группы: $e \cdot x = x$, $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, для любых $g_1, g_2 \in G, x \in X$.

10. Рассмотрите $\mathbb{G}_a$-действия на $\mathbb{A}^2$ вида $(x, y) \mapsto (x + P(y), y)$ и $(x, y) \mapsto (x, y + P(x))$. Докажите, что группа, ими порождённая, транзитивно действует на

- $\mathbb{A}^2$;
- парах различных точек из $\mathbb{A}^2$;
- упорядоченных m-наборах различных точек из $\mathbb{A}^2$.

Это свойство называется *бесконечной транзитивностью.*

Пучок функций на многообразии Z состоит из алгебр функций, определённых для всех открытых подмножеств в Z, удовлетворяющих аксиомам (1) ограничения на подмножество и (2) восстановления функции на множестве по согласованному набору функций на подмножествах. Пучок функций позволяет склеивать *абстрактные* алгебраические многообразия из аффинных.

11. Найдите пучок функций на проективном пространстве $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Чему равна алгебра функций на нём?

12. *Проективное* многообразие изоморфно замкнутому подмножеству $\{P(x_0, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, где P — однородный многочлен. Укажите набор $\mathbb{G}_a$-действий, которые в совокупности транзитивно действуют на квадрике $\{x_0 x_1 - x_2 x_3\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$.