

Коник и теорема Безу

Коникой в \mathbb{R}^2 называется плоская кривая, задаваемая квадратным уравнением:

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Коникой в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ называется плоская кривая, задаваемая уравнением $Q(X, Y, Z) = 0$, где Q — однородный квадратный многочлен, а $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ — 2-мерное проективное пространство над полем \mathbb{R} .

Аналогично вводится понятие формы степени d над $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ с заменой слов «однородный квадратный многочлен» на «однородный многочлен степени d от $n + 1$ переменной».

Форма называется невырожденной, если её однородный многочлен не распадается в произведение двух меньшей степени.

Общая теорема Безу утверждает, что общее число точек пересечения над $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ двух плоских кривых C и D степеней m и n с учётом кратностей в точности равно mn , если \mathbb{F} алгебраически замкнуто.

1. Постройте естественную биекцию между кониками в \mathbb{R}^2 и в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
2. С помощью приведения квадратичной формы к каноническому виду опишите все коники на плоскости: отдельно вырожденные и невырожденные.
3. Пусть $F(U, V)$ — ненулевая форма степени d на $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Докажите, что F имеет не более d нулей.
4. Докажите, что прямую на проективной плоскости можно всегда параметризовать следующим образом

$$X = a(U, V), \quad Y = b(U, V), \quad Z = c(U, V),$$

где a, b, c — линейные формы от U и V .

5. Докажите, что невырожденную конику C на проективной плоскости можно всегда параметризовать следующим образом:

$$X = a(U, V), \quad Y = b(U, V), \quad Z = c(U, V),$$

где a, b, c — квадратичные формы от U и V . (На самом деле, $C \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.)

6. Используя предыдущие задачи, докажите упрощённую версию теоремы Безу: Пусть C, D — две кривые на $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ степеней $c \leq 2$ и $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ соответственно. Тогда у них не более cd точек пересечения.
7. Охарактеризуйте рациональные точки окружности, выбрав подходящую параметризацию.