Нётеровы кольца и теорема Гильберта о нулях

Здесь A — коммутативное кольцо с единицей, $\mathbb{K}$ — поле нулевой характеристики (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

1. Докажите эквивалентность условий в кольце A:

- Каждый идеал $I \lhd A$ *конечно порождён*, то есть существуют такие $f_1, f_2, \ldots, f_k \in I$, что $I = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$.
- Каждая возрастающая цепочка идеалов $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ стабилизируется, то есть для некоторого N выполнено $I_N = I_{N+1} = \ldots$.
- Каждое ненулевое множество идеалов в A имеет максимальный по включению элемент.

При выполнении этих условий кольцо A называется *нётеровым.*

2. Докажите, что кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{K}[x]$ нётеровы.

3. (a) Для нётерова кольца A и идеала $I \lhd A$ докажите, что факторкольцо $B = A/I = \{a + I \mid a \in B\}$ также нётерово.

(b) (теорема Гильберта о базисе) Пусть A — нётерово кольцо. Тогда $A[x]$ также нётерово.
Указание: рассмотрите идеалы старших коэффициентов многочленов в данном идеале.

4. Пусть алгебра A над полем $\mathbb{K}$ конечно порождена. Докажите, что A нётерова.

Алгебраические подмножества

- Алгебра функций на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n$ — это алгебра многочленов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
- *Множеством нулей* набора многочленов $M \subset A$ называется

$$\mathrm{V}(M) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \,\forall f \in M\}.$$

  Такие подмножества называются *алгебраическими*, или *замкнутыми.*
- *Аннулирующим идеалом* подмножества $X \subset \mathbb{A}^n$ называется

$$I(X) = \{f \mid f(p) = 0 \,\forall p \in X\} \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

5. Проверьте, что замкнутые подмножества образуют *топологию Зарисского*:

- Объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто.
- Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.
- Всё пространство и пустое множество замкнуты.

Как она связана с классической топологией? Можно ли отделить две точки непесекающимися открытыми окрестностями (это свойство называется *хаусдорфовостью*)?

6. Докажите, что

(a) если $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n$, то $\mathrm{V}(X) \supset \mathrm{V}(Y)$;

(b) для любого $X \subset \mathbb{A}^n$ выполнено $X \subset \mathrm{V}(I(X))$, причём равенство достигается в точности тогда, когда X замкнуто;

(c) для любого $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ выполнено $I \subset I(\mathrm{V}(I))$. Приведите примеры, когда обратное включение не выполняется, над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.

Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz)

Радикалом идеала I называется

$$\sqrt{I} = \{f \mid \exists d\colon f^d \in I\}.$$

Идеал I называется радикальным, если $I = \sqrt{I}$. В дальнейшем $\mathbb{K}$ предполагается *алгебраически замкнутым*, то есть любой многочлен над $\mathbb{K}$ разлагается в произведение линейных множителей. Например, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7. (a) Максимальные идеалы в $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ имеют вид $\mathfrak{m}_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = I(p)$ для некоторой точки $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$.
(b) Пусть $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал, не содержащий 1. Тогда $\mathrm{V}(I) \neq \emptyset$.
(c) (Nullstellensatz) Если $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, то $I(\mathrm{V}(I)) = \sqrt{I}$.

В доказательстве пункта (a) используйте такой факт: если $\mathbb{K}$-алгебра $A = \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_n]$, где $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, является полем, то $A = \mathbb{K}$. В доказательстве пункта (c) рассмотрите идеал $(I, fy - 1)$, где $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, а y — новая переменная.

8. Проведите соответствие между:

(a) радикальными идеалами и замкнутыми подмножествами;
(b) неприводимыми многочленами и неприводимыми гиперповерхностями;
(c) *простыми* идеалами (не разлагающимися в произведение двух идеалов, отличных от данного) и *неприводимыми* замкнутыми множествами (не разлагающимися в объединение двух замкнутых подмножеств).

9. Найдите неприводимые компоненты множества $xy = zt$.

10. Является ли идеал $(xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y) \lhd \mathbb{K}[x, y, z]$ простым? Какому множеству он соответствует?