Вещественные пространства

1. В трёхмерном аффинном пространстве заданы две скрещивающиеся прямые l и r. Верно ли, что прямые (pq), где $p \in l, q \in r$, заметают всё пространство?

2. Приведите пример конечномерного пространства V и трёх попарно трансверсальных (т.е. пересекающихся по началу координат) подпространств $U, W, T \subset V$ таких, что $\dim U + \dim W + \dim T = \dim V$, но $U + W + T \neq V$.

3. Может ли пересечение положительного ортанта $\{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$ с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом?

4. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств в $\mathbb{R}^n$. Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому?

5. Опишите ГМТ в $\mathbb{R}^3$, равноудалённых от

a) двух скрещивающихся прямых,

b) двух точек и прямой, не лежащих в одной плоскости.

6. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на гиперплоскость тоже тупой?

Отображения

1. В какой трёхмерный многогранник перейдёт четырёхмерный единичный куб при факторизации $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ по одномерному подпространству, порождённому суммой стандартных базисных векторов?

2. Чему равна композиция отражений векторного пространства относительно координатных гиперплоскостей?

3. Зафиксируем на аффинной плоскости две точки $P \neq Q$. Является ли аффинным отображение, переводящее каждую точку плоскости X в центр треугольника PQX?

4. Чему равна композиция двух гомотетий аффинной плоскости (с разными центрами и коэффициентами)?

Группы

1. Проверьте, что $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ коммутативна, но $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ — нет.

2. Покажите, что группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ порождается поворотами на 180°, и все такие повороты сопряжены друг другу. Докажите, что $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ проста.

3. Найдите линейную оболочку $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ в пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

4. (Движения в $\mathbb{R}^3$) Пусть T_v, S_H, $R_{v,\varphi}$ обозначают соответственно параллельный перенос на вектор v, отражение относительно гиперплоскости H и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против часовой стрелки. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой

a) $S_{H_1} \circ S_{H_2} = R_{v,\varphi}$,

b) $S_{H_1} \circ S_{H_2} = T_v$,

c) $S_H \circ R_{v,\varphi} \circ S_H = R_{u,\psi}$,
d) $R_{v_1,\varphi_1} \circ R_{v_2,\varphi_2} = T_v \circ R_{u,\psi}$,
e) $R_{u,\varphi} \circ S_{H_1} \circ R_{u,-\varphi} = S_{H_2}$.

5. Пусть $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – некоторое движение. Найти движения

a) $F \circ T_v \circ F^{-1}$,
b) $F \circ S_H \circ F^{-1}$,
c) $F \circ R_{v,\varphi} \circ F^{-1}$.

Проективная геометрия

$\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ — n-мерное проективное пространство над полем $\mathbb{F}$, по умолчанию $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Группа проективных преобразований — $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{F}) = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F})/\{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$.

1. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ так, чтобы точки $A' = (1:0:0)$, $B' = (0:1:0)$, $C' = (0:0:1)$ лежали соответственно на прямых $(CB), (AC), (AB)$, а прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ пересекались в точке $(1:1:1)$.

2. Опишите все преобразования проективной прямой, переводящие

a) $\infty \to \infty$,
b) $\infty \to \infty,\ 0 \to 0$,
c) $\infty \to 0,\ 0 \to \infty,\ 1 \to 1$,
d) $\infty \to 1,\ 0 \to 0,\ 1 \to \infty$,
e) $\infty \to \infty,\ 0 \to 1,\ 1 \to 0$.

3. а) В какие множества переводит прямые и окружности преобразование комплексной проективной прямой $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$?
б) Найдите образ множества $\{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} \subset \mathbb{C}$ в $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ при отображении $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

4. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1 и ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ можно так выбрать базис, чтобы для каждого j стандартная аффинная карта $U_j = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_j \neq 0\}$ была равна $U_j = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \ell_j$, то есть ℓ_j была прямой на бесконечности для U_j?

5. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $U, V \subset \mathbb{P}^n$ выполняется неравенство $\dim(U \cap V) \geqslant \dim U + \dim V - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}^n$ пересекаются).

6. Пусть сумма размерностей двух непересекающихся проективных подпространств V_1 и V_2 в $\mathbb{P}^n$ равна $n-1$. Покажите, что для любой точки $p \notin V_1, V_2$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как V_1, так и V_2.

Конечные поля

$\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для простых p.

1. Оказалось, что в группе по изучению французского языка для любых двух девочек есть ровно один мальчик, который нравится им обеим, и каждый мальчик нравится по крайней мере трём девочкам. Приведите пример такой группы, в которой учится больше одного мальчика.

2. Может ли какое-либо поле $\mathbb{F}$ содержать поля $\mathbb{F}_p$ и $\mathbb{F}_{p'}$ для различных простых p, p'?

3. Сколько k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$?

4. Сколько элементов в группах $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$?

5. Пусть $r = 2^k$. Докажите, что на кривой $C = \{x^{r+1} + y^{r+1} + z^{r+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{r^2})$ ровно $(r-2)(r-1)^2$ точек.