

## Экстремальные задачи (теорема Турана)

1. (a) Докажите, что если граф не содержит треугольников, то  $e \leq n^2/4$ .  
 (b) Докажите, что если  $e > n^2/4$ , то в графе есть по крайней мере  $\lfloor n/2 \rfloor$  треугольников.
2. Докажите, что если граф не содержит
  - (a) несамопересекающегося цикла длины 4, то  $e < n^{3/2}$ .
  - (b) подграфа  $K_{3,2}$ , то  $e < 2n^{3/2}$ .
3. Имея  $n$  точек в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , соединим рёбрами пары точек, расстояние между которыми равно 1. Это называется *дистанционным графом*. Обозначим через  $E_n(d)$  максимальное число рёбер среди всевозможных дистанционных графов в  $\mathbb{R}^d$  с  $n$  вершинами. Докажите следующие утверждения:
  - (a)  $E_n(2) > n \lfloor \log_2 n \rfloor / 4$ ;
  - (b)  $E_n(2) \leq 2n^{3/2}$ .

## Домашнее задание

4. Докажите, что для любых  $n$  точек на плоскости существует не более  $n$  диаметров, т.е. (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно максимуму из всех возможных расстояний между парами из этих  $n$  точек.
5. (a) Докажите, что если граф не содержит подграфа  $K_{3,3}$ , то  $e < 2n^{5/3}$ .  
 (b) Докажите, что  $E_n(3) \leq 2n^{5/3}$ .
6. Докажите, что  $\frac{(n-1)^2}{4} \leq E_n(4) \leq \frac{2(n+4)^2}{5}$ .