

Двухцветные числа Рамсея

1. Докажите следующие утверждения.

- Среди пяти человек может не найтись ни трех попарно знакомых, ни трех попарно незнакомых.
- Среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
- Среди любых десяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
- Среди любых девяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
- Среди восьми человек может не найтись ни трех попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.
- Среди любых 18 человек найдется либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.
- Среди любых 14 человек найдется либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Числом Рамсея $R(m, n)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x , что выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

- среди любых x человек найдется либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых.
- в любом графе с x вершинами найдется либо m -клика, либо n -антиклика.
- для любой раскраски ребер графа K_x в синий и красный цвета найдется либо синяя m -клика, либо красная n -клика.

Например, очевидно, что $R(1, n) = 1$ и $R(2, n) = n$ для любого n . В задаче 1 доказано, что $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(4, 4) \leq 18$ и $R(3, 5) \leq 14$. Но не очевидно, что такое число существует для любых m, n .

2. Докажите следующие утверждения.

- Если числа $R(m - 1, n)$ и $R(m, n - 1)$ существуют, то число $R(m, n)$ существует и $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$. Это утверждение обычно коротко записывают в виде « $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$ ». Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.
- $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.
- $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1) - 1$, если числа $R(m - 1, n)$ и $R(m, n - 1)$ четны.
- $R(5, 5) \leq 62$.

3. Докажите, что если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.

4. Докажите, что $R(4, 4) \geq 18$.

Домашнее задание

5. Докажите, что если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.

6. Докажите, что $R(3, 5) \geq 14$.