Числа Рамсея для гиперграфов

1. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что есть 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

2. Докажите следующие утверждения.

(a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) *Теорема Эрдёша–Секереша.* Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдется выпуклый 10-угольник.

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1, \ldots, m_k \geq l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет.

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \ldots, m_k) = R(m_1, \ldots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче 1 требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leq 8000$. А при решении задачи 2*c* требуется доказать, что $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$ существует.

3. Докажите следующие утверждения.

(a) Число $R_l(m_1, \ldots, m_k)$ существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.
(b) $R_l(m_1, \ldots, m_k) \leq R_l(R_l(m_1, m_2), m_3, \ldots, m_k)$.

4. Докажите, что если $C_r^n < 2^{C_n^3 - 1}$, то $R_3(n, n) > r$.

Домашнее задание

1. Докажите, что сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение для

(a) $m = 2, p = 89$;
(b) $m = 3, p = 97$;
(c) $m = 9, p = 97$.

2. Докажите следующие теоремы.

(a) *Теорема Шура.* Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.
Более точно, для любого целого $k > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в k цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.
(b) Для любого целого $m > 0$ существует такое $M > 0$, что для любого простого числа $p > M$ сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение.

3. Докажите, что $R_l(m, n) \leq R_{l-1}(R_l(m-1, n), R_l(m, n-1)) + 1$.

4. Докажите, что найдется такое число $c > 0$, что $R_3(n, n) \geq 2^{cn^2}$.