

Независимость и доказательства существования

Определение. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если $|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|$. При $B \neq \emptyset$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M . События A и B называются *независимыми*, если $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. В частности, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

- По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.
- Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $\{1, \dots, 400\}$ в 2 цвета?
 - Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \dots, 18\}$ одноцветно.
 - Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ неодноразноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \dots, 18\}$ неодноразноцветно.
 - Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \dots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \dots, 13\}$ одноцветно.
- Докажите, что подмножества A и B конечного множества M независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B} = M \setminus B$ независимы.
- Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$?
 - Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется независимостью в совокупности.)
 - Тот же вопрос, если богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

Определение. Подмножество A конечного множества M называется *независимым* от набора подмножеств $B_1, \dots, B_k \subset M$, если A независимо с пересечением любого набора множеств из B_1, \dots, B_k . Событие A называется *независимым* от набора событий B_1, \dots, B_k , если A независимо с пересечением любого набора событий из B_1, \dots, B_k .

- Приведите пример попарно независимых подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, но для которых A не является независимым от набора B_1, B_2 .

Домашнее задание

- По кругу стоят 200 студентов из 10 групп по 20 студентов. Докажите, что можно выбрать старост в группах так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.
- Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества, не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо от набора B_1, B_2 .
- Докажите равносильность условий на подмножества A, B_1, \dots, B_k конечного множества:
 - A независимо от набора B_1, \dots, B_k ;
 - \overline{A} независимо от набора B_1, \dots, B_k ;
 - A независимо от набора $\overline{B_1}, \dots, \overline{B_k}$.