

Комбинаторные тождества

1. (a) Докажите *правило Паскаля*: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \leq k \leq n - 1$.
(b) Найдите сумму $C_n^0 + \dots + C_n^n$.
(c) Докажите рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода:

$$S(n+1, k+1) = (k+1) \cdot S(n, k+1) + S(n, k).$$

$S(n, k)$ — это количество разбиений n -элементного множества на k непустых подмножеств.

2. (a) В скольких подмножествах множества $\{1, 2, \dots, 11\}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?
(b) В скольких подмножествах множества $\{1, 2, \dots, 11\}$ не найдётся трёх подряд идущих чисел?

3. Найдите суммы:

- (a) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$;
(b) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$;
(c) $C_n^k + C_{n+1}^{k+1} + \dots + C_{n+m}^{k+m}$;
(d) $(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2$;
(e) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n$.

4. Найдите «явные» формулы для сумм. В ответе используйте только конечную комбинацию (без многоточий) целочисленных функций целочисленного аргумента.

- (a) $\sum_{k \geq 0} C_n^{2k}$;
(b) $\sum_{k \geq 0} C_n^{4k}$.

Домашнее задание

5. Найдите «явную» формулу для суммы $\sum_{k \geq 0} C_n^{3k}$.
6. В ряд стоят числа $1, 2, \dots, n$. Найдите количество способов выбрать k из них так, чтобы никакие два выбранных не стояли рядом. (Формально — найдите количество k -элементных подмножеств в $\{1, 2, \dots, n\}$, в которых никакие два элемента не соседние.)