

## Комбинаторные тождества

1. (a) Докажите *правило Паскаля*:  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ , если  $0 \leq k \leq n - 1$ .  
(b) Найдите сумму  $C_n^0 + \dots + C_n^n$ .  
(c) Докажите рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода:

$$S(n+1, k+1) = (k+1) \cdot S(n, k+1) + S(n, k).$$

$S(n, k)$  — это количество разбиений  $n$ -элементного множества на  $k$  непустых подмножеств.

2. (a) В скольких подмножествах множества  $\{1, 2, \dots, 11\}$  не найдётся двух подряд идущих чисел?  
(b) В скольких подмножествах множества  $\{1, 2, \dots, 11\}$  не найдётся трёх подряд идущих чисел?

3. Найдите суммы:

- (a)  $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$ ;  
(b)  $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ ;  
(c)  $C_n^k + C_{n+1}^{k+1} + \dots + C_{n+m}^{k+m}$ ;  
(d)  $(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ ;  
(e)  $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n$ .

4. Найдите «явные» формулы для сумм. В ответе используйте только конечную комбинацию (без многоточий) целочисленных функций целочисленного аргумента.

- (a)  $\sum_{k \geq 0} C_n^{2k}$ ;  
(b)  $\sum_{k \geq 0} C_n^{4k}$ .

## Домашнее задание

5. Найдите «явную» формулу для суммы  $\sum_{k \geq 0} C_n^{3k}$ .
6. В ряд стоят числа  $1, 2, \dots, n$ . Найдите количество способов выбрать  $k$  из них так, чтобы никакие два выбранных не стояли рядом. (Формально — найдите количество  $k$ -элементных подмножеств в  $\{1, 2, \dots, n\}$ , в которых никакие два элемента не соседние.)