Линейно-алгебраический метод

1. Обозначим через $\left|{n \atop k}\right|$ количество k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$.

(a) Найдите $\left|{n \atop k}\right|$ для $n = 2, 3$ и всех возможных k,

(b) Проверьте, что $\left|{n \atop 0}\right| = \left|{n \atop n}\right| = 1$, $\left|{n \atop 1}\right| = \left|{n \atop n-1}\right| = 2^n - 1$, $\left|{n \atop k}\right| = \left|{n \atop n-k}\right|$,

(c) Докажите, что $\left|{n+1 \atop k+1}\right| = \left|{n \atop k+1}\right| + 2^{n-k}\left|{n \atop k}\right|$,

(d) Вычислите $\left|{n \atop k}\right|$.

2. Докажите, что наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n + 1$.
Указание: рассмотрите скалярные произведения соответствующих векторов.

3. Докажите, что среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
Указание: рассмотрите пространство

$$V_{25,9} = \left\{(x_1, \dots, x_{25}) \in \{0, 1\} \mid \sum x_i = 9\right\}$$

и докажите два вспомогательных утверждения:

(a) Для каждого $a \in V_{25,9}$ рассмотрим многочлен

$F_a(x) = (\langle a, x\rangle - 1)(\langle a, x\rangle - 2) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{25}]/(x_1^2 - 1, \dots, x_{25}^2 - 1)$,

где $x = (x_1, \dots, x_{25})$, то есть в котором для каждого i заменили $x_i^2 \mapsto 1$. Тогда для любого набора векторов $a_1, \dots, a_s$, если их попарные скалярные произведения не делятся на 3, то многочлены $F_{a_1}, \dots, F_{a_s}$ линейно независимы.

(b) Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, расстояние между которыми кратно трём.

4. Докажите, что среди любых k пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента, где

(a) $k = 107$

(b) $k = 92$

5. Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n - 1$.
Указание: Для каждого двудольного подграфа выпишите его матрицу инцидентности и рассмотрите ранг суммы.