

**Задача-звёздочка 1.** Найдите асимптотику  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^4$ .

## Графы

- (a) Докажите, что в любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер.  
(b) Пусть в графе  $G$  на  $n$  вершинах степень каждой вершины — хотя бы  $\frac{n}{2} - 1$ . Докажите, что  $G$  связан.

## Перечисление деревьев

- Каких графов с данными  $n$  вершинами больше:
  - имеющих изолированную вершину или не имеющих?
  - связных или несвязных?
- (a) Найдите код Прюфера дерева с вершинами  $\{1, 2, \dots, 10\}$  и рёбрами  $(8, 9), (8, 4), (4, 10), (10, 3), (3, 5), (10, 6), (10, 1), (1, 7), (1, 2)$ .  
(b) Восстановите дерево по коду Прюфера  $1, 1, 2, 5, 4, 2, 7$ .
- Докажите, что
  - код Прюфера определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством деревьев с данными  $n$  вершинами и множеством слов длины  $n - 2$  из этих вершин.
  - в коде Прюфера вершина степени  $d$  встречается  $d - 1$  раз.
- (a) Каких графов больше, деревьев с данными 100 вершинами или унциклических графов с данными 98 вершинами?  
(b) Выразите число унциклических графов с данными  $n$  вершинами в виде суммы не более чем  $n$  слагаемых.