Графы с точностью до изоморфизма.

Графы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon \mathrm{V}(G_1) \to \mathrm{V}(G_2)$, удовлетворяющее условию: вершины $a, b \in \mathrm{V}(G_1)$ соединены ребром в том и только в том случае, если их образы $f(a), f(b) \in \mathrm{V}(G_2)$ соединены ребром.

- K_n — полный граф на n вершинах.
- $K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями из m и n вершин.
- Клика — подграф, являющийся полным графом.

1. Для произвольных $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ найдите количество

(a) клик размера k в графе K_n;
(b) клик размера k в графе $K_{m,n}$;
(c) независимых множеств размера k в графе K_n;
(d) независимых множеств размера k в графе $K_{m,n}$;
(e) подграфов, изоморфных $K_{k,l}$, в графе K_n;
(f) подграфов, изоморфных $K_{k,l}$, в графе $K_{m,n}$.

Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

2. Перечислите все попарно неизоморфные

(a) графы с четырьмя вершинами,
(b) связные графы с пятью вершинами и пятью ребрами,
(c) несвязные графы с пятью вершинами.

3. Докажите, что неизоморфных деревьев на n вершинах не более 4^n.

Задача-звёздочка

4*. Докажите, что число неизоморфных связных мультиграфов (графов с, возможно, кратными рёбрами) без петель с m рёбрами не превосходит $(4m)^m$.

Плоские графы

5. (a) Докажите *формулу Эйлера*: для любого связного плоского графа с n вершинами, e ребрами и f гранями имеет место равенство $n - e + f = 2$.

(b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

6. *Применения формулы Эйлера*. Докажите следующие утверждения:

(a) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, выполнены соотношения $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.

(b) Графы K_5 и $K_{3,3}$ невозможно нарисовать на плоскости без самопересечений.

(c) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(d) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ ребер, то $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$.

7. Докажите, что вершины планарного графа можно так раскрасить в шесть цветов, что никакие две одноцветные вершины не соединены ребром (то есть любой планарный граф — шестидольный). А в пять цветов?