

## Гамильтоновы пути и циклы.

*Гамильтонов цикл (путь)* в графе — цикл (путь), проходящий через каждую вершину ровно один раз. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым*. Достаточные условия гамильтоновости графа на  $n \geq 3$  вершинах:

**Теорема Оре:** сумма степеней любых двух несмежных вершин  $\geq n$ .

**Теорема Дирака:** степень каждой вершины не меньше  $\frac{n}{2}$ .

**Теорема Эрдеша–Хватала:** для некоторого  $k \geq 2$  верны условия:

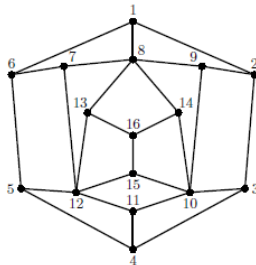
- среди любых  $k + 1$  вершин графа есть ребро,
- после удаления любых  $k - 1$  вершин граф остаётся связным.

*Несамопересекающийся путь (цикл)* — путь (цикл), проходящий по каждой вершине не более одного раза. Длина пути (цикла) — число рёбер в нём.

1. Докажите, что если в связном графе на  $n$  вершинах есть несамопересекающийся цикл длины  $s < n$ , то в этом графе также есть несамопересекающийся цикл длины  $s$ .
2. Пусть  $a_1, \dots, a_s$  — несамопересекающийся путь максимальной длины в графе, причём  $s \geq 3$  и  $\deg a_1 + \deg a_s \geq s$ . Докажите, что в этом графе также есть несамопересекающийся цикл длины  $s$ .
3. Докажите, что грани гамильтонова плоского графа можно так раскрасить в 4 цвета, чтобы никакие две одноцветные грани не касались по ребру.

4. Есть ли в данном графе

- (а) гамильтонов цикл;
- (б) гамильтонов путь?



5. Докажите, что если граф связен и  $2e \geq n^2 - 3n + 6$ , то он гамильтонов.
6. Докажите, что граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше  $n - 1$ , имеет гамильтонов путь.
7. *Турнир* — это ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ровно одним ребром. Докажите следующие утверждения.
  - (а) В любом турнире имеется ориентированный гамильтонов путь.
  - (б) Для любого  $n$  существует турнир с  $n$  вершинами, в котором не менее  $\frac{n!}{2^n}$  ориентированных гамильтоновых путей.