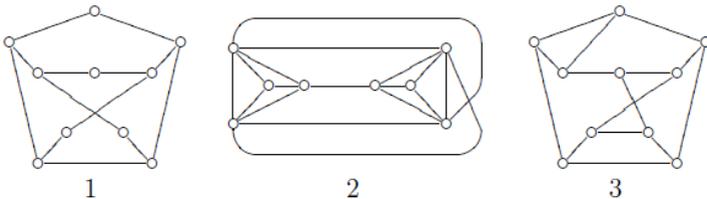


Раскраски графов.

Правильная раскраска графа в k цветов — это раскраска множества его вершин в k цветов так, чтобы никакие две одноцветные вершины не были смежными.

1. Пусть в графе степень каждой вершины не превосходит d . Докажите, что его можно правильно раскрасить в $d + 1$ цветов, если
 - (а) есть вершина степени менее d ;
 - (б) есть вершина, при удалении которой граф перестаёт быть связным.
 2. Пусть для данного графа G и числа k среди любых $k + 1$ вершин есть ребро. Докажите, что G невозможно правильно покрасить менее, чем в n/k цветов.
 3. Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить (как неориентированный) в $2d + 1$ цвет.
- *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G .
 - *Хроматическим индексом* $\chi'(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно раскрасить рёбра графа G (т.е. любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета).
4. Найдите хроматическое число и хроматический индекс графов на рисунке.



- *Число независимости* $\alpha(G)$ — размер максимального независимого подмножества.
- *Кликовое число* $\omega(G)$ — размер максимального полного подграфа (клики).
- $\Delta(G)$ — максимум степеней вершин.
- Выполнены соотношения $\chi(G) \geq \omega(G)$ и $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.
- **Теорема Брукса.** Если граф G связный, не полный и не является циклом нечётной длины, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

- **Теорема Визинга.** Для любого графа G выполнено $\chi'(G) = \Delta(G)$ или $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
 - **Жадный** алгоритм раскраски вершин: выбирается нумерация вершин, а потом каждая вершина, начиная с первой, красится в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.
5. Докажите, что качество раскраски, построенной жадным алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:
- (a) Покажите, как упорядочить вершины произвольного графа, так, чтобы жадный алгоритм использовал ровно $\chi(G)$ цветов.
 - (b) Для каждого натурального k предьявите двудольный граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная жадным алгоритмом, будет задействовать не менее k цветов.