

Случайные графы.

Зафиксируем $p \in (0, 1)$ и назовём *вероятностью графа* (в модели, или вероятностном пространстве, Эрдёша–Реньи) с n вершинами $\{1, 2, \dots, n\}$ и e рёбрами число

$$P(G) = p^e \cdot (1 - p)^{C_n^2 - e}.$$

Вероятностью семейства (или, что то же самое, свойства) графов с данными вершинами называется сумма вероятностей входящих в него графов.

Случайной величиной называется функция, определённая на множестве всех графов с данными вершинами. Например, количество рёбер графа — случайная величина.

Математическим ожиданием случайной величины Y называется её «взвешенное среднее»

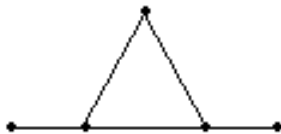
$$\mathbb{E}Y = \sum_G Y(G)P(G) = \sum_{s=1}^k y_s P(Y(G) = y_s),$$

где y_1, \dots, y_k — возможные значения Y .

Дисперсией случайной величины Y называется число $\mathbb{D}Y = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}Y)^2]$.

1. Для данных n и p найдите мат. ожидание количества

- изолированных вершин;
- треугольников;
- путей длины 2;
- вершин степени 11;
- k -клик;
- k -клик, являющихся компонентами связности;
- подграфов, изоморфных графу на рисунке;
- индуцированных подграфов, изоморфных графу на рисунке.



2. Докажите, что для данных n и p вероятность наличия изолированного множества из k вершин меньше $e^{k \ln n - pk(k-1)/2}$.

3. Для данных n и p найдите дисперсию величин, указанных в пп. 1.(a)–(d) первой задачи.

Асимптотики в случайных графах

Событие A_n происходит *асимптотически почти наверное* (а.п.н., также с асимптотической вероятностью 1) относительно последовательности $f(n)$, если $P(A_n) \rightarrow 1$ при $p = f(n)$, $n \rightarrow \infty$. Общепринятое сокращение: при $p(n) = f(n)$ событие A_n происходит а.п.н.

Пусть даны случайная величина X и число $a > 0$.

Неравенство Маркова: $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{a}$.

Неравенство Чебышёва: $P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{D}X}{a^2}$.

5. Докажите, что при $p = \frac{1}{2}$ а.п.н. нет клики размера $100 \ln n$.
6. Докажите, что хроматическое число случайного графа $G(n, p)$ а.п.н.
 - (а) не меньше $\frac{n}{20 \ln n}$ при $p = \frac{1}{3}$;
 - (б) не больше двух при $p(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$;
 - (с) равно единице при $p(n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
7. Докажите, что при $p(n) = \frac{1}{2n}$ а.п.н. в графе более $\frac{n}{2}$ изолированных вершин.
8. Докажите, что при $p(n) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ а.п.н. никакая пара рёбер не имеет общей вершины.

Функция $p^*(n)$ называется *пороговой вероятностью* для свойства A , если

 - при $\frac{p(n)}{p^*(n)} \rightarrow 0$ а.п.н. граф не обладает свойством A ,
 - а при $\frac{p(n)}{p^*(n)} \rightarrow +\infty$ а.п.н. граф обладает свойством A .
9. Докажите, что пороговой вероятностью для свойства «граф содержит треугольник» является функция $p^*(n) = \frac{1}{n}$.