Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f\colon U \to M$. *Оператор формы* $S\colon \mathrm{T}_pU \to \mathrm{T}_pU$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = d\mathrm{N}(X)$. *Главные* кривизны k_1, k_2 и направления X_1, X_2 — это собственные значения и векторы S. *Гауссова* кривизна $\mathrm{K} = k_1 k_2$, *средняя* кривизна $\mathrm{H} = k_1 + k_2$.

ГКП-4, упр.1. Докажите, что для кривизны нормального сечения верно

$$k_n(X) := \frac{\langle df(X), dN(X)\rangle}{\langle df(X), df(X)\rangle}$$

ГКП-4, упр.2. Вторая квадратичная форма определяется по формуле

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -\langle SX, Y\rangle = -\langle d\mathrm{N}(X), df(Y)\rangle.$$

Докажите, что матрица $\mathrm{I\!I}$ квадратичной формы имеет вид:

$$\mathrm{I\!I} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{N}, f_{uu}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle \\ \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{vv}\rangle \end{pmatrix}.$$

ГКП-4, упр.3. Докажите, что $\langle SX, Y\rangle = \langle X, SY\rangle$.

ГКП-4, упр.4. Докажите, что $\langle X_1, X_2\rangle = 0$.

ГКП-4, упр.5. Пусть e_1 и e_2 — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные в некоторой точке двумерной гиперповерхности. Докажите, что $\mathrm{H} = \mathrm{I\!I}(e_1, e_1) + \mathrm{I\!I}(e_2, e_2)$.

ГКП-4, упр.6. (Формула Эйлера). Пусть T — единичный касательный вектор на поверхности, и пусть $\theta_j = \angle(T, X_j)$. Докажите, что $k_n(T) = k_1 \cos^2\theta_1 + k_2 \cos^2\theta_2$.

ГКП-4, упр.7*. (Теорема Менье). Пусть T — вектор скорости кривой μ на поверхности M. Пусть N_μ — вектор главной нормали к μ, $\theta = \angle(N, N_\mu)$. Тогда

$$k_n(T) = k_\mu \cos\theta = \frac{\mathrm{I\!I}(T,T)}{\langle T, T\rangle}.$$

ГКП-4, упр.8*. Пусть две двумерные гиперповерхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ. Пусть k — кривизна γ, k_j — нормальные кривизны вдоль γ в M_j, а θ — угол между нормалями к M_1 и M_2. Докажите, что

$$k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos \theta.$$

ГКП-4, упр.9*. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — нормальные кривизны двумерной гиперповерхности в направлениях, разбивающих касательную плоскость на углы π/m. Докажите, что

$$\frac{k_1 + \ldots + k_m}{m} = \frac{H}{2}.$$