Внешние формы

Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — векторное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а V^* — пространство *линейных функционалов* на V с двойственным базисом $\{f_1, \ldots, f_n\}$, то есть $f_i(e_j)$ равно 1 при $i = j$ и 0 иначе.

Внешняя k-форма на V — это кососимметрическая k-линейная функция. Пространство внешних k-форм

$$\Lambda^k(V) = \langle f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} \mid j_1 < \ldots < j_k \rangle$$

имеет размерность C_n^k.

Звезда Ходжа $\star\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ — это изоморфизм линейных пространств, заданный формулой

$$\star(f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}) = \operatorname{sgn} \sigma_{j_1,\ldots,j_n} \cdot f_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge f_{j_n},$$

где $\sigma_{j_1,\ldots,j_n}$ — перестановка n различных чисел.

ГКП-6, упр.1. Пусть k нечётно, а ω^k — внешняя k-форма в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\omega^k \wedge \omega^k = 0$.

ГКП-6, упр.2. Пусть a, b — векторы в $\mathbb{R}^3$. Обозначим $\omega_a^1(x) = (a, x)$. Докажите, что отображение $a \mapsto \omega_a^1$ — изоморфизм пространств $\mathbb{R}^3 \cong \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Проверьте, что $\omega_a^1 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.

ГКП-6, упр.3. Пусть $\omega_1 = f_1 + f_2 + f_3,\ \omega_2 = f_1 - f_2 + 2f_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Вычислите $\star\omega_1$, $\star\omega_2$ и $\star(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

ГКП-6, упр.4. Пусть $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Покажите, что $\star(\star\omega) = -\omega$ для $n = 2$ и $\star(\star\omega) = \omega$ для $n = 3$.

(b) Покажите, что $\star(\star\omega) = (-1)^{n+1}\omega$ для любого $n \geq 2$.

(c*) Что можно сказать про $\star(\star\omega)$, если ω — внешняя k-форма?

Дифференциальные формы

На многообразии M в точке p касательное пространство $\mathrm{T}_p(M)$ имеет базис $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, а двойственное ему *кокасательное* пространство $\mathrm{T}_p^*(M)$ имеет двойственный базис $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

Дифференциальная k-форма

$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

— это набор k-форм в касательных пространствах к M, гладко зависящий от точки: $\omega_{j_1\ldots j_k}(x)$ — гладкие функции. *Внешний дифференциал* $d\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+1}(V)$ переводит k-форму ω в $k+1$-форму

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} d\omega_{j_1\ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

.

ГКП-6, упр.5. Докажите, что

(b) $d^2\omega = d \circ d(\omega) = 0$ для всех ω.

(c) $d(\omega_1^k \wedge \omega_2^m) = d\omega_1^k \wedge \omega_2^m + (-1)^k \omega_1^k \wedge d\omega_2^m$.

ГКП-6, упр.6. *Кодифференциал* δ переводит $\omega \in \Lambda^k(M)$ в $\delta\omega := \star(d(\star\omega))$.

(a) Докажите, что если $k = 0$, то $\delta\omega = 0$.

(b) Докажите, что если $\omega \in \Lambda^k(M)$, то $\delta\omega \in \Lambda^{k-1}(M)$.

(c) Вычислите $\delta\omega$ для $\omega = e^y dx + (x+y)^2 dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$.

ГКП-6, упр.7. Обобщённый Лапласиан на k-формах задаётся по формуле

$$\Delta := \delta d + d\delta = \star d \star d + d \star d \star .$$

(a) Пусть $f(x,y) = xy + 2y^2$. Вычислите Δf, используя формулу выше и стандартную формулу из анализа. Сравните результат.

(b) Вычислите $\Delta\omega$ для $\omega = xdx + zdy - ydz \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

ГКП-6, упр.8. Пусть $\omega = 2dx + xdy$ — дифференциальная 1-форма на $\mathbb{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$. Проинтегрируйте ω вдоль ориентированных отрезков AB и BA. Как соотносятся эти два значения?