Геометрия дискретных поверхностей

ГКП-7, упр.1. Докажите, что

(1) площадь сферического треугольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равна $\sum \alpha_i - \pi$.

(2) Докажите, что площадь сферического n-угольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_i + (2-n)\pi$.

ГКП-7, упр.2. Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная симплициальная поверхность без края. Для данной вершины v рассмотрим единичные нормали $n_1, \ldots, n_k$ к содержащим её граням. Определим гауссову кривизну $K(v)$ в точке v как площадь сферического многоугольника, натянутого на концы векторов $n_1, \ldots, n_k$, а также определим угловой дефект по формуле $d(v) = 2\pi - \sum_{f\in F_v} \angle_f(v)$, где F_v — это все грани, содержащие вершину v, а $\angle_f(v)$ — плоский угол грани f при вершине v. Докажите, что $d(v) = K(v)$ для всех вершин v.

ГКП-7, упр.3. (Дискретная теорема Гаусса-Бонне)

(1) Для произвольного выпуклого многогранника докажите, что

$$\sum_{v\in V} d(v) = 4\pi.$$

(2) Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная ориентированная симплициальная поверхность без края. Докажите, что $\sum_{v\in V} d(v) = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$ — Эйлерова характеристика симплициальной поверхности M.

ГКП-7, упр.4. Площадь S треугольника ABC на плоскости зависит от расположения точек A, B и C. Докажите, что градиент S как функции от A — это вектор $\nabla_A S$, перпендикулярный стороне BC, а по длине равный половине BC.

ГКП-7, упр.5. Рассмотрим объём Vol многогранника как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v \mathrm{Vol} = \frac{1}{3}\sum_i A_i N_i,$$

где A_i и N_i — соответственно площади и нормали граней, содержащих v.

ГКП-7, упр.6. Рассмотрим площадь S симплициальной поверхности как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v S = \frac{1}{2} \sum_i (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i)(v_i - v),$$

где v_i — вершины, смежные с данной, а α_i, β_i — углы, противолежащие ребру vv_i.