

# 1. Плоские кривые

**ГКП-1, упр.1.** Дана кривая

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t^3 - 2t, t^2 - 2),$$

- (a) Во всех ли точках она регулярна?
- (b) Проверьте, лежат ли на её образе точки  $(1; -1)$ ,  $(4; 2)$ ,  $(6; 1)$ .
- (c) Запишите неявное уравнение этой кривой.

**ГКП-1, упр.2.** Найдите репер Френе кривой  $y = x^2 + 4x + 3$  в точках  $-1, 0, 1$ .

**ГКП-1, упр.3.** Найдите окружность, соприкасающуюся с данной окружностью  $O = \{x^2 + y^2 = 1\}$  в точке  $(1, 0)$ .

**ГКП-1, упр.4.** Докажите формулу кривизны кривой  $\gamma$  с произвольной параметризацией:

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$$

**ГКП-1, упр.5.** Вычислите явные формулы различных определений кривизны *дискретной* кривой  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2 \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ :

- (a) угол поворота,
- (b) соприкасающаяся окружность,
- (c) изменение длины,
- (d) \* формула Штейнера (вариант, отличный от предыдущих).

**ГКП-1, упр.6\*.** Проверьте следующие формулы для гладких кривых  $\gamma$  и  $\eta$  (вариация длины):

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{length}(\gamma + \varepsilon\eta) = - \int_0^L \langle \eta(s), \kappa(s)N(s) \rangle ds,$$

$$\text{length}(\gamma + \varepsilon N) = \text{length}(\gamma) - \varepsilon \int_0^L \kappa(s) ds + o(\varepsilon).$$

**ГКП-1, упр.7\*.** Какие возможны значения полной (т.е. суммарной по всей длине) кривизны замкнутой кривой?

**ГКП-1, упр.8\***. Окружность радиуса  $r$  катится без скольжения внутри окружности радиуса  $R > r$ . Составьте уравнение траектории точки  $M$  катящейся окружности. Изобразите траекторию при  $R = 2r$  и  $R = 3r$ .

**ГКП-1, упр.9\***. (практикум) Рассмотрим *поток кривизны*

$$\frac{d}{dt}\gamma_i(t) = \kappa_s(t)N_s(t),$$

где  $\{\gamma_s(0)\}$  — исходная замкнутая дискретная кривая. Для каких определений дискретной кривизны выполняются следующие свойства потока кривизны (проверьте на компьютере и докажите)?

- (a) полная кривизна неизменна;
- (b) центр масс кривой неизменен;
- (c) правильный многоугольник переходит в себе подобный.