

## Геометрия сферы $S^2$

Во всех задачах  $a, b, c$  — стороны сферического треугольника, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы.

1. Докажите, что в любом сферическом треугольнике корректно определены
  - вписанные и описанные окружности,
  - точки пересечения медиан и высот.
2. Могут ли совпасть точки пересечения медиан и высот сферического треугольника?
3. Докажите, что площадь двуугольника, который является частью сферы, ограниченной двумя прямыми, пересекающимися под острым углом  $\alpha$ , равна  $2\alpha$ .
4. Докажите, что площадь сферического треугольника равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . (В частности, сумма углов сферического треугольника всегда больше  $\pi$ .)
5. Докажите, что  $a + b + c < 2\pi$ .
6. (\*) Найдите площадь сферического диска радиуса  $r$ .
7. (\*) Докажите первую теорему косинусов для сферы:  $\cos a = \cos b \cos c + \cos \alpha \cdot \sin b \sin c$ .  
Как выглядит теорема Пифагора на сфере?
8. (\*) Докажите вторую теорему косинусов для сферы:  $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \cos a \cdot \sin \beta \sin \gamma$ .