

Проективная двойственность

Для векторного пространства V точки в $\mathbb{P}(V^*)$ — это гиперплоскости в $\mathbb{P}(V)$, и наоборот. Данное соответствие сохраняет отношение инцидентности и называется *проективной двойственностью*. При фиксировании билинейной формы происходит отождествление пространств V и V^* , а также $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ — это *полярное соответствие*, переводящее полюс (точку) в *полюру* (двойственную ей гиперплоскость). В данном листке $\dim V = 3$, и полюры — прямые.

1. Какая теорема двойственна теореме Паппа?

(Папп) Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают три прямые $A'B, B'C, C'A$ соответственно в точках X, Y, Z . Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

2. При каких a являются параллельными прямые в $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$, заданные уравнениями

$$3ix_0 + ax_1 - x_2 = 0, \quad -aix_0 + x_1 - ix_2 = 0, \quad 5x_0 + x_1 + 3ix_2 = 0?$$

3. (Параметризация пучка гиперплоскостей) Пусть $H \subset \mathbb{P}(V)$ — подпространство коразмерности 2. Пусть F_H — пучок гиперплоскостей, содержащих H , а t — прямая, *трансверсальная* к F_H , то есть не пересекающая H . Докажите, что отображение $f_t: t \rightarrow F_H$, переводящее точку $p \in t$ в гиперплоскость $\langle p, H \rangle$ — проективный изоморфизм.

4. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, а F_1, F_2 — пучки прямых, проходящих через P_1, P_2 соответственно. Возьмём произвольное отображение $f: F_1 \rightarrow F_2$. Докажите эквивалентность условий:

- f — проективный изоморфизм, сохраняющий прямую $\langle P_1, P_2 \rangle$;
- существует такая прямая r , не проходящая через P_1, P_2 , что $f(s) = \langle s \cap r, P_2 \rangle$ для любой прямой $s \in F_1$.

5. При проективной двойственности (применяемой к касательным кривой) коника на проективной плоскости переходит в конику.

6. Множество точек, лежащих на своей полюре, образует самодвойственную конику.

7. (*, теорема Шалля) Точки пересечения сторон треугольника с полюрами противоположных вершин лежат на одной прямой.