Гиперболическая геометрия Лобачевского $\mathbb{H}^2$

.

Теория

Модель Пуанкаре в круге: Точки гиперболической плоскости в этой модели — это точки открытого единичного круга $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Прямые — диаметры этого круга, либо окружности, ортогональные границе этого круга $\partial D = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Эта граница состоит из так называемых *бесконечно удалённых* точек плоскости Лобачевского и называется *абсолютом.* Эту модель часто называют конформно-евклидовой, поскольку углы между прямыми здесь равны евклидовым углам.

Модель Кэли-Клейна в круге: В этой модели точки снова суть точки открытого круга, а прямыми уже будут хорды этого круга. Пусть $A, B \in \mathbb{H}^2$ — две точки, а прямая AB пересекает абсолют в точках X, Y так, что эти 4 точки лежат в последовательности Y, A, B, X. Тогда расстояние между точками A и B в этой модели определяется по формуле

$$d(A, B) := \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|AX|}{|BX|} : \frac{|AY|}{|BY|}\right).$$

Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости: Здесь точками являются точки верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, а прямыми — прямые и окружности перпендикулярные вещественной прямой $\{\operatorname{Im} z = 0\}$. Здесь группа движений $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ состоит из дробно-линейных преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{и} \quad z \mapsto \frac{a(-\overline{z}) + b}{c(-\overline{z}) + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Здесь метрика определяется формулой

$$d(A, B) := |\ln(A, B, X, Y)|,$$

где $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ — двойное отношение четверки комплексных точек.

Векторная модель на гиперболоиде:

Рассмотрим теперь пространство Минковского $\mathbb{E}^{2,1}$ со скалярным умножением

$$(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

В качестве векторной модели пространства Лобачевского будем рассматривать одну из связных компонент гиперболоида

$$\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{E}^{2,1} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\}.$$

Расстояние здесь задается по формуле

$$\operatorname{ch} d(x, y) = -(x, y).$$

Теорема 1 *Все эти 4 модели изоморфны (биективны и изометричны).*

Задачи

Во всех задачах a, b, c — стороны гиперболического треугольника, а α, β, γ — противолежащие им углы.

1. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

2. Докажите, что в любом гиперболическом треугольнике корректно определены вписанные и описанные окружности.

3. Могут ли все медианы и высоты гиперболического треугольника пройти через одну точку?

4. (*) Докажите первую теорему косинусов для $\mathbb{H}^2$: $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \cos\alpha \cdot \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c$. Как выглядит теорема Пифагора на плоскости Лобачевского?

5. (*) Докажите вторую теорему косинусов для $\mathbb{H}^2$: $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \operatorname{ch} a \cdot \sin\beta\sin\gamma$.

6. Докажите теорему синусов для треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ в $\mathbb{H}^2$: $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}$.