Представления, дифференцирования, касательная алгебра

1. *Представление* группы — это вложение в группу автоморфизмов линейного пространства. Автоморфизмы $\mathbb{K}^n$ образуют *полную* линейную группу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Для действия группы G на многообразии X с помощью двойственного гомоморфизма алгебр найдите представление G на $\mathbb{K}[X]$. Докажите, что любой набор функций лежит в G-инвариантном конечномерном подпространстве.
Представление с таким свойством называется *рациональным* или *локально конечным.*

2. Рассмотрев действие на себе левыми сдвигами, с помощью предыдущей задачи докажите, что любая аффинная группа вкладывается в полную линейную группу.

3. Проверьте, что якобиан отображения задаёт гомоморфизм касательных пространств. Выведите "наивное" определение касательного пространства к алгебраическому подмножеству $\{x \in \mathbb{A}^n \mid P_1(x) = \ldots = P_k(x) = 0\}$.

4. Дифференцирование алгебры A — это линейное отображение $\partial\colon A \to A$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

(a) Докажите, что множество дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$ образуют антикоммутативную алгебру относительно скобки Ли $[\partial_1, \partial_2] = \partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1$.

(b) Докажите тождество Якоби

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству Якоби, называется *алгеброй Ли.*

5. Дифференцирование $\partial \in \mathrm{Der}(A)$ называется *локально конечным*, если каждая функция лежит в ∂-инвариантном конечномерном подпространстве, и *локально нильпотентным*, если $\forall f \in A\ \exists n:\ \partial^n f = 0$.

6. Что такое векторное поле на многообразиями? Наивно: в каждой точке взяли касательный вектор так, чтобы координаты выражались регулярными функциями на каждой карте. Правильно: сечение касательного расслоения.
Найдите соответствие между векторными полями на многообразии и дифференцированиями на его алгебре функций. Какому векторному полю соответствует дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x}$ на плоскости? Какому дифференцированию соответствует векторное поле (x, x)?

7. Для каждого касательного вектора в единице $v \in \mathrm{T}_e G$ образуем векторное поле, разнеся его левым умножением (точнее, дифференциалами умножений на элементы группы). Проверьте, что

- таким образом получаются все векторные поля, инвариантные относительно левых действий;
- они образуют алгебру Ли, называемую *касательной алгеброй* $\mathrm{Lie}\, G$ группы G.

8. Проверьте, что для вектора $v \in \mathrm{Lie}\, G$ существует не более одной однопараметрической группы $\gamma\colon \mathbb{K} \to G$ с касательным вектором в единице v. Определим *экспоненту* $\exp(v) = \gamma 1$; для $v \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{GL}(V)$ верно $\exp(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{k!}$.

9. Пусть

Продолжение следует: разложение Жордана, порождение группы однопараметрическими подгруппами, sl_2-тройки.